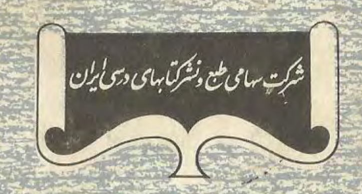
هندسه

برای سال چهارم ریاضی

توانا بود هر که دانا بود

وزارت آموزش و پرورش



بها در تمام کشور ۲۶ ریال

توانا بود هرکه دانا بود

وزارت آموزش و پرورش

هندسه

برای سال چهارم ریاضی

چاپ و توزیع از :



۱۳۵۲



فهرست مندرجات

عنوان	صفحه
فصل اول	
مفهوم بعضی اصطلاحات درهندسه	۱
فصل دوم	
خط راست	۱۰
فصل سوم	
زاویه	۱۶
فصل چهارم	
دایره	۳۳
کمان یا قوس ، وتر ، زاویهٔ مرکزی	۳۴
زاویه و دایره	۳۸
فصل پنجم	
چندضلعی و مثلث	۴۳
خواص مثلث متساوی‌الساقین	۴۵
حالتهای تساوی دو مثلث	۴۶
نقاط واقع بر نیمساز زاویه ـ نقاط واقع برعمود منصف یك‌پاره خط	۵۱
فصل ششم	
خطوط متوازی	۵۷
زوایای حادث از تقاطع سه خط	۵۹
مجموع زوایای مثلث و چندضلعی	۶۱
زوایایی‌که اضلاعشان متوازی یا متعامد باشند	۶۳
فصل هفتم	
نامساویها در مثلث	۶۸
عمود و مایل	۷۴
فصل هشتم	
چهارضلعیهای مهم	۷۹
فصل نهم	
خطهای مهم در مثلث	۸۹
فصل دهم	
تقارن	۹۸



این‌کتاب‌که به‌وسیلهٔ‌آقایان : موسی‌آذرنوش، احمد بیرشك ، جهانگیر شمس‌آوری ، عبدالغنی علیم مروستی، پروفسور تقی‌فاطمی، باقرنحوی، شادروان محسن‌هنربخش نگارش یافته ، برطبق مادهٔ ۳ قانون کتابهای درسی و اساسنامهٔ سازمان کتابهای درسی ایران‌برای تدریس در دبیرستانها برگزیده شده است .

چاپ از : افست کاویان

عنوان	صفحه

به نام خدا

فصل اول

مفهوم بعضی اصطلاحات در هندسه

مقدمه ـ هر کس در ذهن خود تصوراتی دارد و برای فهماندن آن تصورات به دیگران، معمولاً لفظ و کلمه بکار می‌برد. بنا براین لفظ و کلمه بخودی خود اهمیتی ندارد آنچه مهم است مطلبی است که باید با شنیدن آن لفظ و کلمه فهمیده شود. ازاین جهت بعضی اصطلاحات هندسی را، که مفهومهای اساسی هندسه را بیان می‌کنند، تعریف می‌کنیم تادانش‌آموزان با مطالعه و فراگرفتن آنها بتوانند اصطلاحات هندسی را بطور صحیح و درجای خود بکار برند.

۱ ـ **تعریف** یعنی شناسانیدن؛ برای آنکه چیزی را بشناسانیم باید منحصراً مشخصات و نشانه‌های خاصّ آن چیز بخصوص را که لازم است بیان کرده و از بیان مطالب زاید خودداری کنیم.

۲ ـ **فضا** را همه می‌شناسیم و می‌دانیم که تمام موجودات مثل ستارگان، ماه، خورشید، زمین و آنچه که روی زمین است، در این فضا جایی دارند.

۳ ـ **جسم** ـ هر چیز که قسمتی از فضا را اشغال کند، **جسم** نامیده می‌شود مثل کتاب، مداد، سنگ وغیره.

۴ ـ **حجم** ـ قسمتی ازفضا راکه به وسیلهٔ یك جسم اشغال می‌شود **حجم** آن جسم می‌گویند.

۵ - سطح - مرز بین یك جسم و فضا را سطح آن جسم گویند. بنا بر این هرجسم به وسیلهٔ سطح محدود می‌شود .

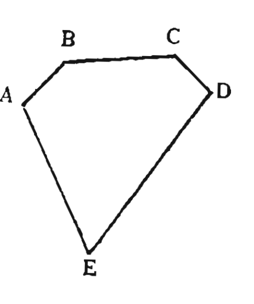
۶ - خط - جایی که دوسطح همدیگر را قطع می کنند، **خط** نامیده می‌شود . همچنین خط می‌تواند سطح را محدود کند .

۷ - نقطه - محل برخورد دو خط را **نقطه** می‌گویند . همچنین نقطه می‌تواند خط را محدود کند .

توجه کنید! حجم ، سطح، خط ، نقطه را به کمك جسم شناختیم؛ ولی در هندسه باید شناسایی حجم ، سطح ، خط و نقطه به کمك ذهن و مستقل از جسم باشد . از این‌رو می گوییم خط از حرکت نقطه و سطح از حرکت خط و حجم ازحرکت سطح پدید می آید .

۸ - شکل - نقطه ، خط ، سطح ، حجم و هرمجموعه‌ای از آنها را در هندسه شکل می‌نامند. اگر یك شکل هندسی را جابجا کنیم (تغییر مکان دهیم)، درفواصل بین نقاط و در زوایا و در روابط بین اجزای آن تغییری پیدا نمی‌شود .

۹ - تساوی دو شکل - هرگاه دوشکل طوری باشند که بتوانیم یکی را تغییرمکان یافتهٔ دیگری فرض‌کنیم، در این صورت آن دو شکل را مساوی هم می‌گوییم. همچنین اگر بتوانیم شکلی را برشکل دیگر چنان منطبق کنیم که یکی‌شوند ، آن دوشکل متساویند (شکل۱) .



ش ۱

۱۰ - تساوی مستقیم و تساوی معکوس - تساوی دو شکل **مستقیم** است وقتی که متساوی و قابل انطباق باشند و **معکوس** است وقتی که متساوی باشند اما قابل انطباق نباشند مگر اینکه یکی از آنها را برگردانیم (شکل۲) .

ش۲

۱۱ - دوشکل متعادل - هرگاه دوشکل فقط از نظر مساحت یا حجم مساوی هم باشند ، آن دو شکل را **متعادل** می‌نامند .

۱۲ - اصل متعارفی - هرمطلبی‌که درستی آن از بدیهیّات باشد، **اصل متعارفی** نامیده می‌شود ، مثل :

الف - دو مقدار مساوی با مقدار سوم، با یکدیگر مساویند .

ب - اگر به هریك از دومقدار متساوی یکی از دو مقدار متساوی دیگر را بیفزاییم ، دو حاصل جمع با یکدیگر برابرند .

ج - جزء کوچکتر است از کلّ .

د - کل برابر است با مجموع اجزای خود .

ه - اگر a از b و b نیز از c بزرگتر باشد ، a از c بزرگتر خواهد بود .

۱۳ - اصل موضوع - هر مطلبی که درستی آن را باید بدون دلیل قبول‌کنیم ودلیلی هم برای درستی آن نداشته‌باشیم، **اصل‌موضوع** نامیده می‌شود ، مثل :

الف - از یك نقطه فقط یك خط موازی با خط دیگر می‌توان

کشید .

ب ـ بردو نقطه فقط یك خط راست می‌گذرد .

۱۴ـ قضیه ـ هرموضوع یا مطلبی که درستی آن به‌کمك دلیل و برهان واضح و ثابت شود، **قضیه** نامیده می‌شود. مثل این قضیه «هرگاه در مثلثی دوضلع برابر باشند، زاویه‌های روبروی آن دوضلع برابرند.» اگر به این قضیه یا هرقضیهٔ دیگر توجه‌کنید، دوقسمت مشاهده می‌کنید:

الف ـ هرگاه در مثلثی دو ضلع برابر باشند ،

ب ـ زاویه‌های روبروی آن دو ضلع برابرند .

قسمت اول را، که به‌آن متکی می‌شویم، مقدمه یا **فرض** می‌گویند وقسمت دوم را ،که از قسمت اول نتیجه می‌گیریم، **حکم** می‌نامند .

۱۵ ـ برهان ـ برای اثبات درستی یك‌قضیه، به معلوماتی که قبلا پیداکرده‌ایم استناد می‌کنیم و آنها عبارتند از :

الف ـ معانی الفاظ .

ب ـ تعاریف .

ج ـ اصول متعارفی .

د ـ اصول موضوع .

ه ـ قضایایی‌که قبلاً درستی آنها ثابت شده باشد . این استناد را، اگر بنحوی منظم ومنطقی انجام شود ، **برهان** و دلیل می‌نامند و آوردن دلیل و برهان را **استدلال** می‌گویند .

۱۶ ـ تحقیق واثبات ـ دانش‌آموزان‌گرامی شاید شما بارها در مدت تحصیل در کلاسهای پایین‌تر این عبارت را از دبیران خود شنیده باشید: « **تحقیق‌کنید** که مثلاً مجموع زاویه‌های مثلث ABC دو قائمه

است » . آیا می‌دانید اختلاف بین **تحقیق** واثبات چیست ؟

برای اینکه تحقیق کنید که مجموع زاویه‌های مثلث دو قائمه است ، نقاله را برمی‌دارید و با آن اندازه‌های سه زاویهٔ مثلث را معیّن می‌سازید و آنها را باهم جمع می‌کنید. اگرحاصل جمع ۱۸۰ درجه شد، درستی‌قضیه را تحقیق‌کرده‌اید. اما این تحقیق فقط دربارهٔ مثلث ABC شده است و برای یك مثلث دیگرممکن است مجموع زاویه‌ها دو قائمه نباشد . همچنین ممکن است‌که اندازه‌گرفتن زاویه‌ها با نقاله دقیق‌نباشد و حاصل جمعشان از دو قائمه کمتر یا بیشتر شود و شما در درستی قضیه تردید پیداکنید .

ش ۳

اما برای اینکه اثبات‌کنید‌که مجموع زاویه‌های مثلث دو قائمه است ، از A (شکل۳) خطی موازی BC می‌کشید، سپس ازنکاتی چندکه درستی‌آنها ازسابق برای شما محرز شده است استفاده می‌کنید ، به‌این ترتیب :

الف) از نقطهٔ A فقط یك خط موازی با BC می‌توان رسم‌کرد (اصل موضوع).

ب) اگر دوخط متوازی را خط سومی قطع‌کند، دو زاویهٔ متبادل داخلی با هم برابرند (قضیه‌ای که درستی‌آن قبلاً ثابت شده است).

پس نتیجه می‌گیریدکه : $\hat{۱}=\hat{۵}$ و $\hat{۳}=\hat{۴}$.

ج) مجموع تمام زاویه‌های مجاور ومتوالی یك‌طرف خط راست، مساوی دو قائمه است (این هم قضیه‌ای است‌که درستی آن قبلاً محرز شده است). زاویه‌های مجاور ومتوالی ۱، ۲ و۳ دریك طرف خطی‌هستند

که کشیده شده ، پس حاصل جمع آنها دو قائمه است :

$$\hat{۱}+\hat{۲}+\hat{۳}=۱۸۰^\circ$$

د) در یك رابطه می‌توان به جای یك مقدار ، مقدار دیگری مساوی آن را قرار داد (اصل متعارفی) ، پس به جای $\hat{۱}$ مساویش $\hat{۵}$ و به جای $\hat{۳}$ مساویش $\hat{۴}$ را می‌گذارید :

$$\hat{۵}+\hat{۲}+\hat{۴}=۱۸۰^\circ$$

به اینجا که رسیدید، درستی قضیه ثابت شده است ، هیچ تردیدی هم در آن نیست. زیرا که زاویه‌ها را بانقاله اندازه نگرفته‌اید که احتمال اشتباهی در آنها برود؛ بعلاوه، حکم کلی است ودر هرمثلثی صحیح است.

۱۷ - نتیجه ـ هر حکم دیگری که بلافاصله پس از اثبات یك قضیه بدست آید، **نتیجهٔ** آن قضیه نامیده می‌شود. یك قضیه ممکن است چند نتیجه داشته باشد .

۱۸ - هندسه ـ هندسه علمی است که ازشکلهای هندسی وخواص هر یك و روابط آنها ، یا اجزای آنها ، با یکدیگر گفتگو می کند .

قسمتی از هندسه که از اشکال مستوی بحث می‌کند ، **هندسهٔ مسطحه** ، و قسمتی که از اشکال فضایی گفتگو می‌کند، **هندسهٔ فضایی** نام دارد .

هندسه علمی است بسیار کهنسال . بشر از هزاران سال پیش با اصول هندسی آشنایی پیدا کرده است . اولین آثار نوشته دربارهٔ هندسه تقریباً مربوط به چهار هزار سال پیش است . ولی مسلماً قبل ازآن نیز از این علم اطلاعی

در دست بوده است . پیدایش هندسه وپیشرفت آن ، مانند سایر علوم و فنون ، مولود احتیاج بوده است .

حس کنجکاوی وعشق و علاقه به درك حقایق ، که راهنما و رهبر انسان به سوی اختراعات و اکتشافات است ، درپیشرفت هندسه نیز بزرگترین عامل بشمار می‌آید . بشر بتجربه دریافت که خط راست کوتاهترین راه بین دونقطه است ؛ یا برای تعیین فاصلهٔ بین دو نقطه نخست آن را با قدم اندازه‌گرفت تا مدتی بعدکه واحد دیگری جایگزین قدم شد . اندازه‌گرفتن سطح وحجم نیز با تجربه شروع شد . قضایای مهم ازقبیل رابطهٔ بین وتر واضلاع مثلث قائم‌الزاویه بتجربه پیدا شده است .

مدتها پیش از آنکه فیثاغورث دلیل ریاضی برای اثبات رابطهٔ $a^2=b^2+c^2$ (*) پیدا کند ، مصریان با مثلثی که سه ضلع آن ۳ ، ۴ و ۵ یا اعدادی متناسب با ۳ ، ۴ و ۵ بود زاویهٔ قائمه می‌ساختند ؛ زیراکه دریافته بودندکه در مثلثی که اضلاعش ۳ ، ۴ و ۵ یا متناسب با این اعداد باشد ، یك ضلع برضلع دیگرعمود است .

برخی را عقیده براین است که هندسه درمصر پیدا شده وطغیانهای منظم سالانهٔ رود نیل ، که در هرسال ایجاب می‌کرد که حدود کشتزارها و اراضی دیگر از نو تعیین شود ، در پیدایش این علم مؤثر بوده است . حقیقت آنکه بدرستی معلوم نیست هندسه را چینیان ابداع کردند یا مصریان یا هندیان یا ایرانیان. شاید برخی‌اصول تجربی‌آن نزد اقوام مختلف جداگانه موردتوجه واقع شده باشد. آنچه مسلم است ، یونانیان، که علم را به اوج کمال رسانیدند، هندسه را نیز منظم وتکمیل کردند .

مسلم است که ایجاد ساختمانهای با عظمتی مانند اهرام مصر، که بیشتر از پنج هزار سال است در مقابل حوادث طبیعت مقاومت‌کرده واز باران و از تابش‌آفتاب خللی به‌آنها وارد نیامده است، بدون وقوف به‌اصول هندسه میسر نبوده است . دوهزار وپانصد سال پیش **تالس** به تشابه مثلثها پی‌برد وازآنها استفاده کرد و شاگرد او ، **فیثاغورث** رابطهٔ بین وتر و اضلاع مثلث قائم‌الزاویه را اثبات کرد .

در دنیای متمدن قدیم ، لفظ هندسه شامل همهٔ علوم ریاضی بود و سایر شاخه‌های ریاضی ، مانند جبر، مختص محاسبات هندسی بودند . بعداً هم که

(*) b و c اضلاع و a وتر یك مثلث قائم‌الزاویه است .

بتدریج شاخه‌های دیگر استقلال یافتند، باز رابطهٔ خودرا باهندسه حفظ کردند. در قرنهای اخیر هندسهٔ مطلق مورد عنایت و توجه خاص واقع شده و مستقل از سایر مواد ریاضی مورد مطالعه قرارگرفته است.

هندسه‌ای که معمولاً متداول است، **اقلیدسی** گفته می‌شود؛ زیرا که مبنای آن براصل مهمی است که اقلیدس دربیش از ۲۲۰۰ سال پیش وضع کرده است. بعدها اصلهای دیگری مبنای هندسه قرار داده شد و انواع دیگر هندسه اختراع شد ولی هندسهٔ اقلیدسی همچنان باقی‌ماند.

اصول هندسی در علوم دیگر مانند هیئت، مکانیك، شیمی و بخصوص فیزیك نیزمراعات می‌شوند؛ بعلاوه روش تعلیم هندسه که برای ورزیده ساختن و منطقی بارآوردن فکر ازعوامل مؤثر است، به این علم مقامی تزلزل‌ناپذیر بخشیده وآن را از ارکان معارف ومعلومات بشری ساخته است.

دربارهٔ لفظ **هندسه**، برخی را عقیده براین است که این لغت همان **«اندازهٔ»** فارسی خودمان است که معرب‌گردیده و**هندسه** شده است. آنچه مسلم است، لغتهایی که در زبانهای اروپایی بکار می‌روند، مانند Géometrie فرانسه و Geometry انگلیسی همه ازمبنای Geometria لاتین است که خود اقتباس از «گئومتریا»ی یونانی است و خود این کلمه مرکب است از دو لغت گئو، یعنی زمین و متریا، یعنی اندازه‌گرفتن. پس‌هندسه در قدیم، علم اندازه گرفتن زمین بوده است.

خلاصهٔ مطالب مهم:

۱ ـ مقدار فضایی راکه یك جسم اشغال می‌کند، حجم جسم گویند.

۲ ـ حد هرجسم یا حد فاصل دوجزء یك جسم را سطح می‌نامند.

۳ ـ حد هرسطح یا حد فاصل دو سطح را خط می‌گویند.

۴ ـ حد هرخط یا فصل مشترك دوخط، نقطه است.

۵ ـ هرنمایشی از نقطه، خط، سطح و حجم را شکل هندسی می‌نامند.

۶ ـ هندسه علمی است که از شکلهای هندسی و خواص هریك و روابط آنها، یا اجزای آنها، با یکدیگر گفتگو می‌کند.

۷ ـ دو شکل را متساوی می‌گویند به شرط آنکه بتوان یکی را روی دیگری بقسمی قرار دادکه یکی شوند.

۸ ـ اصل متعارفی موضوعی است که درستی آن مسلم وبدیهی باشد.

۹ـ اصل موضوع، مطلبی است که درستی آن را نتوانیم ثابت کنیم وصحت آن را بدون استدلال بپذیریم.

۱۰ ـ مطلبی راکه بتوان صحتش را اثبات کرد، قضیه می‌گویند.

۱۱ ـ برای اثبات قضایا، باید ازمعانی الفاظ، تعاریف، اصول متعارفی، اصول موضوع و قضایایی که قبلاً صحت آنها ثابت شده است، استفاده کرد.

فصل دوم

خط راست

۱ ـ خط ـ هرگاه نقطه‌ای ، مثلاً نوك تیز مدادی ، تغییر مکان دهد، **خط** بوجود می‌آورد.

خط راست ساده‌ترین خطهاست. تصور آن ، بطوری‌که می‌دانید، از یك نخ کشیده پیدا می‌شود . با خط‌کشی که درستی آن تحقیق شده باشد ، جزئی ازیك خط راست را می‌توان رسم‌کرد.

دو نقطه مانند A و B روی کاغذ بگذارید و باخط‌کشی خطی رسم کنید که برآن دو نقطه بگذرد .

این‌کار را بارها تکرارکنید ، می‌بینید که خطها همه برهم منطبق می‌شوند. ازاین آزمایش دوخاصیت اصلی خط راست را نتیجه می‌گیریم :

الف ـ بردو نقطه همواره می‌توان یك خط راست‌گذراند.
ب ـ بردو نقطه بیشتر ازیك خط راست نمی‌گذرد .

خط راستی رسم‌کنید ، می‌توانید آن را در دو جهت ادامه دهید ، و هرقدر بخواهید ادامه دهید . بنا براین خاصیت می‌گوییم که **خط راست نامحدود است** .

خط راست را یا با دوحرف می‌خوانند، مانند خط AB یا بایك حرف ، مانند خط d شکل ۴ .

ش ۴

۲ ـ نیم‌خط ـ اگر خط راستی را از یك طرف محدودکنیم، **نیم‌خط**

یا **خط شعاعی** بوجود می‌آید؛ حدّ نیم‌خط را **مبدأ** آن می‌نامند؛ مانند نیم‌خط OX درشکل ۵ که نقطهٔ O مبدأ آن است .

ش ۵

۳ ـ پاره‌خط ـ جزئی از خط را که به دو نقطه محدود باشد ، **پاره‌خط** یا **قطعه‌خط** می‌گویند ؛ مانند پاره‌خط AB در شکل ۶ . A و B را **دو سر** پاره‌خط می‌گویند .

ش ۶

دو پاره‌خط را بر یك **امتداد** می‌گویند وقتی که هر دو برروی یك خط راست واقع باشند . چند نقطه را **بریك امتداد یا بریك استقامت** می‌نامند وقتی‌که همه برروی یك خط راست قرار داشته باشند .

۴ ـ مقایسهٔ دو پاره‌خط ـ برای سنجیدن دو پاره خط AB و CD (شکل۷) ، آنها را بقسمی روی هم قرار می‌دهیم که یك سرشان (مثلاً A و C) برهم منطبق شوند ؛ حال :

الف) اگر سر دیگرشان (B و D) نیز برهم منطبق شوند، آن دوپاره‌خط را برابرمی‌گوییم وچنین می‌نویسیم : $AB=CD$

ش ۷

ب) اگر سر دیگر قطعه خط CD بین A و B قرار گیرد (شکل ۸) می‌گوییم CD کوچکتر است از AB و آن را چنین می‌نویسیم : $CD<AB$. در این صورت AB مساوی است با مجموع دو قطعه‌خط AD و DB ، یعنی : $AB=AD+DB$.

ش ۸

ج) اگر سر دیگر قطعهٔ CD در خارج A و B قرار گیرد (شکل ۹) ، می‌گوییم که CD بزرگتر از AB است و آن‌را چنین می‌نویسیم:

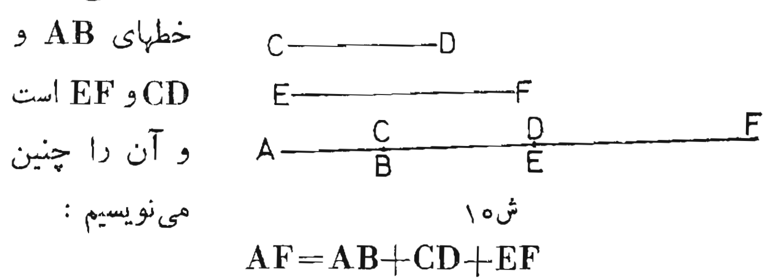
ش ۹

$$CD > AB$$

در این صورت AB مساوی است با تفاضل AD و BD :

$$AB = AD - BD$$

۵ ـ مجموع چند پاره‌خط ـ برای پیدا کردن مجموع چند پاره‌خط ، آنهارا دنبال هم برروی یك خط راست قرارمی‌دهیم تامجموع آنها بدست آید. بدین ترتیب درشکل ۱۰ پاره‌خط AF مجموع پاره‌خطهای AB و CD و EF است و آن را چنین می‌نویسیم :



ش ۱۰

$$AF = AB + CD + EF$$

هرگاه چند پاره‌خط ، بریك امتداد وبه دنبال هم باشند، به‌جای همهٔ آنها یکسره ، می‌توان مجموعشان را قرار داد ، و بعکس.

۶ ـ حاصل ضرب یك پاره خط در یك عدد ـ سه‌برابر پاره‌خط AB ، مجموع سه پاره خط مساوی AB است . درشکل ۱۱، EF برابر حاصل ضرب عدد ۳ در پاره خط AB است .

ش ۱۱

۷ ـ خط شکسته خطی است مرکب از دو یا چند پاره‌خط که به

دنبال هم واقع باشند بقسمی که هریك از آنها با پاره‌خط بعدی یك سر مشترك داشته باشد ودوپاره‌خط متوالی بریك امتداد نباشند (شکل۱۲).

اگر دو سرخط شکسته به هم نرسند ، آن را خط شکستهٔ باز می‌گویند و اگر به هم برسند ، خط شکستهٔ بسته می‌نامند .

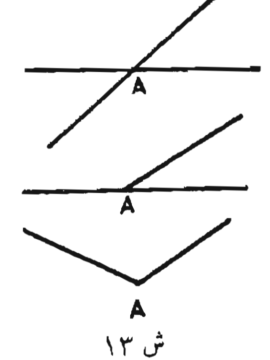
ش ۱۲

۸ ـ خط منحنی ـ هر خطی که هیچ جزء آن‌راست نباشد، منحنی است.

۹ ـ وضع دوخط نسبت به هم ـ می‌دانیم‌که بردونقطه فقط یك خط راست می‌گذرد ؛ بنا براین:

الف) اگر دوخط راست دو نقطهٔ مشترك داشته باشند، برهم منطبق می‌شوند و در حقیقت یك خط خواهند بود .

ب) اگر دوخط راست فقط یك نقطهٔ مشترك داشته باشند، می‌گوییم متقاطعند و نقطهٔ مشترکشان را **نقطهٔ تقاطع** یا نقطهٔ تلاقی آنها می‌نامیم (شکل۱۳).



ش ۱۳

ج) اگر دوخط راست واقع‌در یك صفحه هیچ نقطهٔ مشترك نداشته باشند (یعنی یکدیگررا قطع نکنند)، آن دوخط را **متوازی** یا **موازی با**

ش ۱۴

هم می‌گوییم (شکل۱۴).

۱۰ - جهت خط - اگر اتوموبیلی در راه بین تهران و کرج رفت و آمد کند بناچار یا ازتهران به‌کرج می‌رود ویا از کرج به‌تهران. در صورت اول می‌گویند **جهت حرکت اتوموبیل از تهران به کرج است ؛** تهران مبدأ وکرج منتهای خط سیر اتوموبیل است. درصورت دوم جهت حرکت از کرج به تهران است و کرج **مبدأ** وتهران **منتهاست** .

B O A

ش ۱۵

هرگاه متحرکی برروی پاره‌خط AB شکل۱۵ تغییر مکان دهد، یا درجهت از A به B حرکت می‌کند یا درجهت از B به A .

۱۱ - بردار پاره خطی است که دارای جهت باشد. جهت حرکت ازمبدأ به طرف منتهی را **جهت بردار** و طول پاره‌خط را **اندازهٔ** بردار می‌نامند. برای نمودن‌جهت‌بردار، درانتهای آن علامت پیکان می‌گذارند. در نوشتن اسم بردار، همیشه حرف مبدأ را طرف چپ حرف منتهی می‌نویسند ؛ گاهی هم بردار را با یك حرف نمایش می‌دهند . عموماً در بالای حرف یا حروف نمایندهٔ بردار ، علامت تیر می‌گذارند .

در شکل۱۶ ، نقطهٔ A مبدأ ونقطهٔ B منتهای بردار AB است و در $\overrightarrow{CD}$ نقطهٔ C مبدأ و D منتهاست . بردار V با یك حرف نموده شده است .

A B   D C   V

ش ۱۶

خط نامحدودی که بردار جزئی از آن است،**محمل بردار** نام‌دارد.

هرگاه برروی محمل برداری جهت جبری قائل شویم، مثلاً جهت از چپ به راست را مثبت وجهت از راست به چپ را منفی اختیارکنیم ،

بردار، مثبت یامنفی خواهد بود، برحسب آنکه متحرکی که ازمبدأ آن به طرف منتهایش سیر کند در جهت مثبت محمل تغییر مکان دهد یا در جهت منفی آن .

X' A B D C X

ش ۱۷

خط x'x محمل $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ است (شکل۱۷) و جهت از چپ به راست ، مطابق معمول ، جهت مثبت محمل اختیار شده است . پس $\overrightarrow{AB}$ مثبت و $\overrightarrow{CD}$ منفی است . جلو عددهای حسابی که نمایندهٔ طول‌های هریك ازآنها هستند ، علامات + و − می‌گذاریم .

$(\overrightarrow{AB}) = +2$ و $(\overrightarrow{CD}) = -3$

بردار ، موارد استعمال بسیار دارد . هروقت بخواهیم در فیزیك یا مکانیك مقادیری را نمایش دهیم که دارای امتداد وجهت ومقدارمعین باشند ، بردار بکار می‌بریم .

خلاصهٔ مطالب مهم :

۱ـ خط راست نامحدود است؛ اگر ازیك طرف محدود شود، نیم‌خط و اگر از دو طرف محدود شود، پاره‌خط حاصل می‌شود .

۲ ـ خط شکسته عبارت ازچند پاره‌خط است‌که به دنبال یکدیگر قرار گرفته باشند و هیچگاه دو پاره‌خط متوالی در امتداد یکدیگر نباشند .

۳ ـ دوخط ممکن است یکدیگررا قطع‌کنند یا متوازی باشند . دوخط واقع دریك صفحه را متوازی‌گویند هرگاه هیچ‌نقطهٔ مشترك نداشته باشند یعنی یکدیگر را قطع نکنند .

۴ ـ بردار خطی است که دارای ابتدا و انتها باشد . جهت حرکت از مبدأ به طرف منتهی‌را جهت بردار وطول پاره‌خط را اندازهٔ بردار می‌نامند.

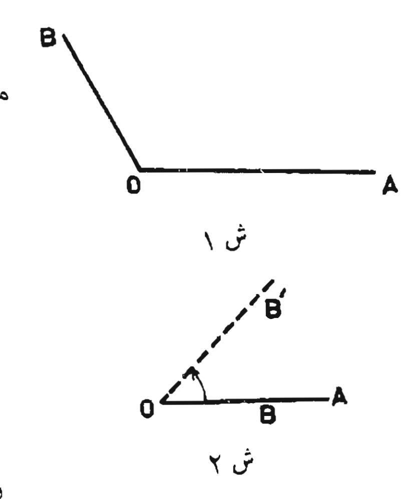
۵ ـ خط نامحدودی‌که بردار برروی‌آن است ، محمل بردار نام‌دارد.

۶ ـ بردار ممکن است در جهت مثبت یا منفی محمل باشد .

فصل سوم

زاویه

۱ ـ زاویه ـ دو نیم‌خط که مبدأ مشترك داشته باشند، صفحه را به دو بخش تقسیم می‌کنند. هر بخش‌را زاویه یاگوشه می‌گویند (شکل۱).



ش ۱

ش ۲

دونیم‌خط ، **دوضلع** زاویه و مبدأ مشترکشان **رأس** زاویه است.مسلم است که چون دو نیم‌خط از یك طرف نامحدودند، اضلاع‌زاویه‌نیز ازهمان‌طرف نامحدودند وبزرگی و کوچکی زاویه بستگی به آن ندارد‌که اضلاع آن را درازتررسم کنیم یاکوتاهتر . دو نیم‌خط OA و OB فرض کنید که برروی هم قرار گرفته باشند (شکل۲)؛ در این صورت زاویه نمی‌سازند. حال OB را درحول نقطهٔO دوران‌دهید، تا از OA جدا شود و به‌وضع OB′ درآید؛ OB′ (یا OB) با OA زاویه‌ای تشکیل می‌دهد و هرچه OB بیشتر دوران کند، زاویه بزرگترمی‌شود.اگر OB آنقدر دوران‌کندکه ازطرف دیگر بر امتداد OA واقع شود (شکل ۳) ، می‌گوییم که زاویهٔ AOB یك‌زاویهٔ **نیم‌صفحه** یا**نیم**-

B O A

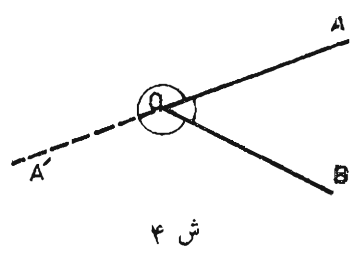
ش ۳

سطح است .

۲ ـ قضیه ـ همهٔ زاویه‌های نیم‌صفحه باهم برابرند .

برهان ـ زیرا می‌توان آنها را برهم منطبق‌کرد .

۳ ـ زاویهٔ محدب ، زاویهٔ مقعر ـ از تقاطع دو نیم‌خط مانند OA و OB ، در حقیقت دو زاویه بوجود می‌آیدکه یکی کوچکتر از نیم صفحه و دیگری بزرگتر از نیم صفحه است. زاویهٔ کوچکتر از نیم‌صفحه را **محدب** و زاویهٔ بزرگتر ازنیم‌صفحه را **مقعر**می‌گویند (شکل۴).

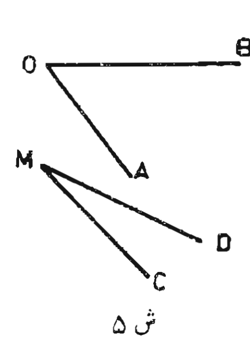


ش ۴

درشکل ۴ ، یکی از دوضلع زاویه، مثلاً AO را امتداد داده‌ایم، می‌بینید که امتدادآن، زاویهٔ مقعر را به دو جزء تقسیم کرده است که یك جزءِ آن نیم صفحه است : پس می‌توان گفت‌که زاویهٔ مقعر آن است که اگر یکی از اضلاعش را امتداد دهیم‌آن را به دو جزء تقسیم کند .

معمولاً مقصود از زاویهٔ بین دو نیم‌خط ، زاویهٔ محدب است .

۴ ـ سنجش دو زاویه ـ برای اینکه دو زاویه مانند AOB و CMD (شکل ۵) را با هم بسنجیم ، یك ضلع و رأس یکی را بر یك ضلع و رأس دیگری منطبق می‌کنیم بقسمی که دو ضلع دیگرشان دریك طرف ضلع مشترك واقع شوند. حال سه وضع ممکن است اتفاق افتد :



ش ۵

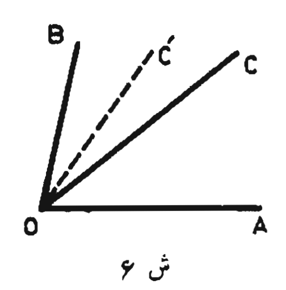
الف ـ دو ضلع دیگر نیز بر هم واقع

شوند ، در این صورت دو زاویه متساویند . $\widehat{CMD}=\widehat{AOB}$

ب - ضلع دوم یکی از زوایا ، مثلاً CMD ، داخل زاویهٔ دیگر واقع شود ، دراین صورت : $\widehat{CMD}<\widehat{AOB}$

ج - ضلع دوم یکی از زوایا، مثلاً CMD ، خارج زاویهٔ دیگر واقع شود ، در این صورت : $\widehat{CMD}>\widehat{AOB}$

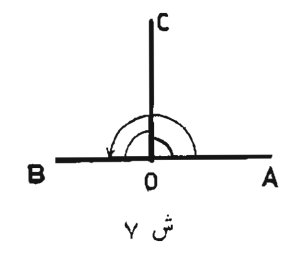
۵- نیمساز زاویه - نیمساز زاویه خطی است که از رأس آن بگذرد وآن را به دوزاویهٔ متساوی تقسیم کند. هرزاویه فقط یك نیمساز دارد ؛ زیرا که اگر OC (شکل ۶) نیمساز زاویهٔ AOB باشد و کسی تصور کند که ممکن است خط دیگری ، مثلاً OC' نیز زاویه را نصف کند می‌گوییم که اگر OC' غیر از OC باشد بناچار در داخل یکی از دوزاویهٔ AOC و COB، مثلاً در داخل COB، واقع می‌شود و در این صورت $\widehat{AOC'}>\widehat{AOC}$ است ، یعنی OC' نیمساز نیست .



ش ۶

۶ - زاویهٔ قائمه - نصف زاویهٔ نیم‌صفحه را زاویهٔ قائمه می‌نامند .

در شکل ۷ ، زاویهٔ AOB نیم‌صفحه و OC نیمساز آن است وهریك از دو زاویهٔ AOC و BOC **قائمه** است .



ش ۷

۷- قضیه - همهٔ زاویه‌های قائمه با هم برابرند .

برهان - چون همهٔ زاویه‌های نیم‌صفحه متساویند ، نصفهای آنها یعنی زاویه‌های قائمه ، نیز باهم برابرند .

۸ - زاویهٔ حاده ، زاویهٔ منفرجه - زاویهٔ کوچکتر از زاویهٔ قائمه را حاده و زاویهٔ بزرگتر از زاویهٔ قائمه را منفرجه می‌گویند (شکل ۸).

ش ۸

۹ - زاویه‌های مجاور - دو زاویه که در رأس و یك ضلع مشترك باشند واضلاع غیر مشترکشان در دو طرف ضلع مشترك واقع باشند، مجاور نامیده می‌شوند، مانند زاویه‌های AOB و BOC درشکل ۹ .

ش ۹

۱۰ - جمع زوایا - برای جمع‌کردن دو زاویه ، آنها را چنان پهلوی هم قرار می‌دهیم که مجاور شوند؛ زاویهٔ بین دو ضلع غیرمشترك ، مجموع آن دو زاویه است (شکل ۹).

$$\widehat{AOB}+\widehat{BOC}=\widehat{AOC}$$

برای جمع کردن چند زاویه مانند $\hat{1}$ و $\hat{2}$ و $\hat{3}$ و $\hat{4}$ (شکل ۱۰ الف)، $\hat{2}$ را مجاور $\hat{1}$ و پس از آن $\hat{3}$ را مجاور $\hat{2}$ و بعد $\hat{4}$ را مجاور $\hat{3}$ می‌کنیم

ش ۱۰ الف

تا $\widehat{AOB}$ بدست آید (شکل ۱۰ ب) :

$$\widehat{AOB}=\hat{۱}+\hat{۲}+\hat{۳}+\hat{۴}$$

ش ۱۰ ب

۱۱- تفاضل دو زاویه- برای بدست آوردن تفاضل دو زاویه، رأس و یك ضلع یکی را بر رأس و یك ضلع دیگری منطبق می‌کنیم بقسمی که دو ضلع دیگر آنها در یك طرف ضلع مشترك واقع شوند ؛ زاویهٔ بین دو ضلع غیر مشترك ، تفاضل دو زاویهٔ مفروض است . در شکل ۱۱ ،



$$\widehat{BOA}-\widehat{COA}=\widehat{BOC}$$

ش ۱۱

۱۲- زاویه‌های متمم ومکمل- دو زاویه راکه مجموعشان یك قائمه باشد ، **متمم** یکدیگر می‌گویند .

دو زاویه‌راکه مجموعشان دوقائمه‌باشد، **مکمل** یکدیگرمی‌نامند.

دو زاویه‌که یك مکمل ، یایك متمم داشته باشند ، با هم مساویند (چرا ؟) .

۱۳- زاویه‌های مجانب - دو زاویهٔ مجاور و مکمل را **مجانب** می‌خوانند .

۱۴- قضیه - اضلاع غیر مشترك دو زاویهٔ مجانب ، بر امتداد یکدیگر ند .

فرض : $\hat{\alpha}+\hat{\beta}=$ قائمه۲ و α مجاور β است (شکل۱۲) .

حکم : OC برامتداد OA است.

ش ۱۲

برهان - AOC که مساوی $\alpha+\beta$ است ، ۲ قائمه یعنی نیم‌صفحه است ، پس OC برامتداد OA است .

۱۵ - قضیه - اگر اضلاع غیر مشترك دو زاویهٔ مجاور برامتداد یکدیگر باشند، دو زاویه مجانبند .

فرض: OC بر امتداد OA است (شکل ۱۳) .

حکم: $\hat{\alpha}+\hat{\beta}=$ قائمه ۲

برهان - زاویهٔ AOC ، که اضلاعش برامتداد یکدیگر ند، یك نیم‌صفحه است ، یعنی : قائمه ۲ $=\hat{\alpha}+\hat{\beta}$.

ش ۱۳

۱۶ - قضیهٔ عکس - اگر در دو قضیهٔ شمارهٔ ۱۴ و ۱۵ دقت‌کنید متوجه می‌شوید که فرض قضیهٔ اول با حکم قضیهٔ دوم و حکم قضیهٔ اول بافرض قضیهٔ دوم یکی است. چنین دوقضیه را **عکس** یکدیگرمی‌نامند.

عکس هرقضیه ، قضیه‌ای است که فرضش تمام یا قسمتی از حکم قضیهٔ اول وحکمش تمام یا قسمتی از فرض‌آن باشد .

عکس یك قضیه ممکن است درست باشد ، مانند قضیهٔ شمارهٔ ۱۴ و عکس‌آن . همچنین ممکن است عکس قضیه‌ای درست نباشد . مثلاً می‌دانیم‌که :

همهٔ زاویه‌های قائمه با هم مساویند .

دراین قضیه ، فرض این است که چند زاویهٔ قائمه داریم و حکم این است که همهٔ آنها با هم مساویند .

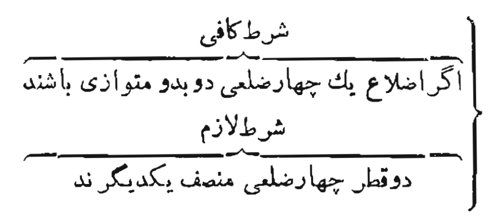
عکس‌قضیه چنین خواهد شد .

همهٔ زاویه‌هایی‌که با هم مساوی باشند ، قائمه‌اند .

می‌دانیدکه این قضیه درست نیست .

۱۷ ـ شرط لازم و کافی ـ قضایای هندسه عموماً به صورت جمله‌های شرطی بیان می‌شوند .

مثلاً : اگرمثلثی متساوی‌الساقین باشد، زاویه‌های مجاور به قاعده با هم مساویند. بعضی از قضایا را هم که بظاهر شرطی نیستند، مثل این قضیه:« دوقطر مستطیل با هم برابرند »، می‌توان به صورت شرطی بیان کرد ؛ مثلاً اینطور گفت : « اگر دو پاره‌خط قطرهای مستطیل باشند ، باهم برابرند». درقضیه‌هایی‌که به صورت شرطی بیان می‌شوند،می‌توانیم فرض را **شرط کافی** حکم و حکم را **شرط لازم** فرض خوانیم . پس‌اگر قضیه‌ای و عکس‌آن صحیح باشند، فرض در قضیهٔ اول شرط کافی و در قضیهٔ عکس شرط لازم خواهد بود. از این‌رو می‌توان یك قضیه وعکس همان قضیه را با ذکرشرط لازم وکافی مقدم برفرض به صورت یك قضیه بیان‌کرد ، مانند این دوقضیه :



که به این صورت بیان می‌شود :

قضیه ـ شرط لازم وکافی برای آنکه دو قطر یك چهارضلعی منصف یکدیگر باشند آن است‌که اضلاع متقابل چهارضلعی دوبدو متوازی باشند .

در حقیقت برای اثبات قضیه‌ای که به صورت شرط لازم و کافی بیان شده باشد، باید دو قضیه ثابت‌کردکه عکس یکدیگرند .

۱۸ ـ زاویه‌های متقابل به رأس ـ هرگاه اضلاع زاویه‌ای بر امتداد اضلاع زاویهٔ دیگر باشند، دو زاویه را متقابل به رأس می‌نامند ، مانند $\widehat{AOB}$ و $\widehat{COD}$ در شکل ۱۴ .

۱۹ ـ قضیه ـ دو زاویهٔ متقابل به رأس، متساویند .

ش ۱۴

فرض: OC برامتداد OA و OD بر امتداد OB است (شکل۱۴) .

حکم: $\widehat{AOB}=\widehat{COD}$

برهان ـ $\widehat{AOB}$ مکمل $\hat{1}$ است زیرا که این دو زاویه مجانب هستند . به دلیل مشابه $\widehat{COD}$ نیز مکمل $\hat{1}$ است . می‌دانیم‌که دو زاویه‌که یك مکمل داشته باشند، متساویند.

پس : $\widehat{AOB}=\widehat{COD}$

۲۰ ـ قضیهٔ عکس ـ هرگاه ازنقطهٔ O واقع برخط AC دونیم‌خط OB و OD را در دو طرف آن چنان رسم کنیم که دو زاویهٔ AOB و COD متساوی باشند ، OB و OD بر امتداد یکدیگرند ، یعنی دو زاویهٔ نامبرده ، متقابل به رأسند (شکل ۱۵) .

ش ۱۵

برهان ـ اگرOD برامتداد OB نباشد، امتداد OB را OB' می‌نامیم . دراین صورت :

$\widehat{BOA}=\widehat{B'OC}$. اما به‌فرض $\widehat{COD}=\widehat{BOA}$، پس $\widehat{COD}=\widehat{B'OC}$.

چون در دو زاویهٔ متساوی اخیر ضلع OC یکی است، OD بر OB′ منطبق است؛ یعنی OD بر امتداد OB است.

۳۱ ـ قضیه ـ امتداد نیمساز هر زاویه، زاویهٔ متقابل به رأس آن را هم نصف می‌کند.

فرض: $\widehat{AOC}$ و $\widehat{BOD}$ (شکل ۱۶) متقابل به رأس هستند و OE نیمساز $\widehat{AOC}$ و OF امتداد OE است.

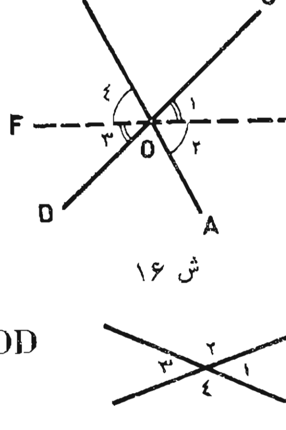
حکم: OF نیمساز $\widehat{BOD}$ است.

برهان ـ $\hat{1}=\hat{3}$ زیرا متقابل به رأسند

و $\hat{2}=\hat{1}$ بنا به‌فرض

و $\hat{4}=\hat{2}$ زیرا متقابل به رأسند

پس: $\hat{4}=\hat{3}$ یعنی OF زاویهٔ BOD را نصف می‌کند.



ش ۱۶

ش ۱۷

۳۲ ـ زوایای بین دو خط ـ هر دو خط متقاطع با هم چهار زاویه می‌سازند که دو بدو متقابل به رأس و متساویند، و هر دو زاویه که متقابل به رأس نباشند، مکمل یکدیگرند (شکل ۱۷).

۳۳ ـ خطوط عمود برهم ـ هرگاه دو خط باهم زاویهٔ قائمه بسازند، گویند دو خط برهم عمودند (شکل ۱۸).

ش ۱۸

OA و OB را امتداد می‌دهیم تا به وضع OC و OD درآیند. بدیهی است که هریك از سه زاویهٔ COB و COD و AOD نیز یك قائمه است؛ به‌دلیل اینکه یا مکمل AOB یا متقابل به‌رأس آن است؛ پس دو خط عمود برهم با یکدیگر چهار زاویهٔ قائمه می‌سازند.

۳۴ـ قضیه ـ نیمسازهای دو زاویهٔ مجانب برهم عمودند.

فرض:
$\hat{\alpha}+\hat{\beta}=$ ۲قائمه

OM نیمساز $\hat{\alpha}$ و ON نیمساز $\hat{\beta}$ است (شکل ۱۹).

حکم: $\widehat{MON}=$ ۱قائمه

ش ۱۹

برهان ـ

$$\widehat{MOB}=\frac{1}{2}\widehat{AOB}=\frac{\hat{\alpha}}{2}$$

$$\widehat{BON}=\frac{1}{2}\widehat{BOC}=\frac{\hat{\beta}}{2}$$

دو رابطه را با هم جمع می‌کنیم:

$$\widehat{MOB}+\widehat{BON}=\frac{\hat{\alpha}}{2}+\frac{\hat{\beta}}{2}=\frac{\hat{\alpha}+\hat{\beta}}{2}=\frac{\text{۲قائمه}}{2}=\text{۱قائمه}$$

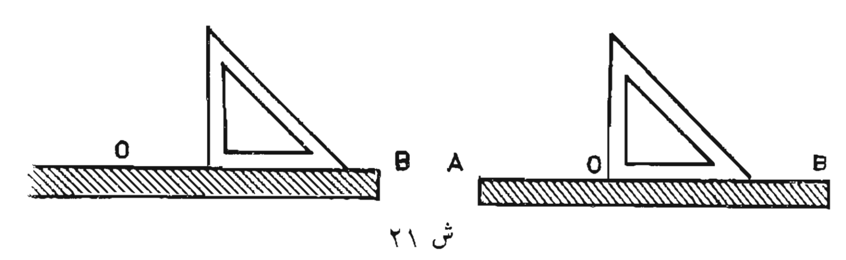
۳۵ـ مسئله ـ از یك نقطهٔ O خطی برخط AB عمود کنید.

راه اول ـ استفاده از تا کردن کاغذ ـ کاغذ را چنان تا می‌کنیم که تای آن بر O بگذرد و دو جزء خط AB بر هم منطبق شوند،

ش ۲۰

خط تای کاغذ بر AB عمود است (شکل ۲۰) .

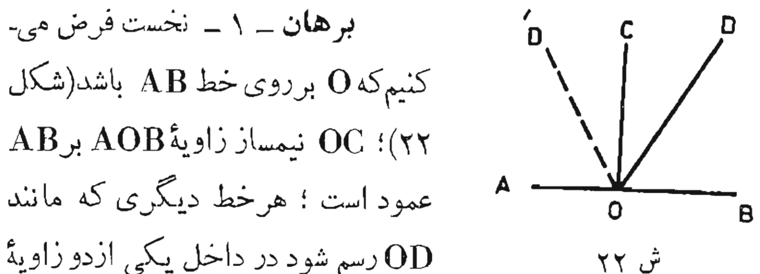
راه دوم ـ استفاده از خطکش و گونیا ـ خطکش را درکنار خط می‌گذاریم و آن را ثابت نگاه می‌داریم و یك ضلع زاویهٔ قائمهٔ گونیا را بر آن متکی می‌کنیم و گونیا را آنقدر در امتداد خطکش می‌لغزانیم تا ضلع دیگر زاویهٔ قائمه‌اش بر O بگذرد ؛ خطی که از O در کنار این ضلع گونیا کشیده شود بر AB عمود است (شکل ۲۱) .



ش ۲۱

۲۶ ـ قضیه ـ از یك نقطه همیشه می‌توان یك عمود بریك خط رسم کرد و هیچگاه بیشتر از یك عمود نمی‌توان رسم نمود .

برهان ـ ۱ ـ نخست فرض می‌کنیم که O برروی خط AB باشد (شکل ۲۲)؛ OC نیمساز زاویهٔ AOB بر AB عمود است ؛ هرخط دیگری که مانند OD رسم شود در داخل یکی ازدو زاویهٔ AOC و BOC واقع می‌شود ، پس زاویه‌ای که OD با AB می‌سازد قائمه نیست ؛ یعنی OD بر AB نمی‌تواند عمود باشد .



ش ۲۲

۲ ـ اگر O خارج AB باشد (شکل ۲۳)، خط OH را به یکی از دو راهی که قبلاً گفته‌ایم بر AB عمودکرده و آن را امتداد می‌دهیم

و برروی امتداد آن HO' را مساوی HO جدا می‌کنیم ؛ بدیهی است که اگر شکل را در حول AB تا کنیم HO بر HO' منطبق می‌شود و O روی O' قرار می‌گیرد ؛ حال هرخط دیگری مانند OM که بر O بگذرانیم، بر AB نمی‌تواند عمود باشد؛ زیراکه‌چون شکل‌را در حول AB تاکنیم OM به وضع O'M درمی‌آید و دو زاویهٔ OMH و O'MH که برهم منطبق می‌شوند، با هم برابرند؛ اما مجموع این دو زاویه نیم‌صفحه نیست ، زیراکه O و M و O' بریك امتداد نیستند ؛ پس OMH نمی‌تواند قائمه باشد .

ش ۲۳

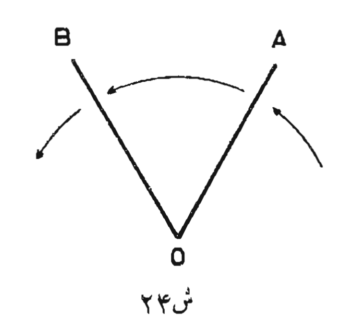
۲۷ ـ جهت زاویه ـ همانطور که برروی یك خط ممکن است جهت مثبت ومنفی قائل شویم، برروی یك صفحه نیزمی‌توان جهت مثبت و منفی قائل شد . دراین صورت زاویه‌هایی که در آن صفحه‌اند دارای جهت مثبت یا منفی خواهند بود .

ساعتی را برروی صفحهٔ کاغذی قرار دهید یا در روی صفحه نگاه دارید و دقت کنید که عقربه‌های آن به‌کدام طرف می‌چرخند .

ممکن است جهت گردش عقربه های ساعت را بر روی صفحه جهت مثبت یامنفی اختیارکنیم. معمولاً جهت حرکت عقربه‌های ساعت را جهت منفی ، ودرنتیجه جهت مخالف حرکت عقربه‌ها را مثبت اختیار

می کنند .

اکنون زاویه‌ای را که بین دو نیم‌خط OA و OB تشکیل می‌شود، در نظر می‌گیریم (شکل ۲۴) . تا وقتی که برای زاویه جهت در نظر نگرفته‌ایم ممکن است آن را $\widehat{AOB}$ بخوانیم یا $\widehat{BOA}$ ؛ اما وقتی که برای زاویه جهت قائل شویم $\widehat{AOB}$ و $\widehat{BOA}$ مختلف الجهت هستند .



ش۲۴

جهت زاویه را به این قسم تعیین می‌کنیم که ضلعی را که اول اسم می‌بریم، در حول رأس به طرف ضلع دیگر دوران می‌دهیم ؛ اگر این دوران در جهت مثبت صفحه باشد، جهت زاویه مثبت است و اگر در جهت منفی صفحه باشد، جهت زاویه منفی است . درشکل ۲۴، جهت $\widehat{AOB}$ مثبت وجهت $\widehat{BOA}$ منفی است .

۲۸ - اندازه‌گیری زاویه - واحد زاویه ، زاویهٔ قائمه است . اما چون این واحد خیلی بزرگ است، آن را به اجزای کوچکتری تقسیم می‌کنند و آن جزءِ کوچکتر را واحد زاویه می‌گیرند .

۲۹ - درجه و اجزای آن - درجه $\frac{۱}{۹۰}$ زاویهٔ قائمه است. اجزای درجه عبارتند از **دقیقه** که $\frac{۱}{۶۰}$ درجه است و **ثانیه** که $\frac{۱}{۶۰}$ دقیقه یا $\frac{۱}{۶۰\times۶۰}=\frac{۱}{۳۶۰۰}$ درجه است . این دقیقه و ثانیه را شصت گانی یا شصت قسمتی می‌گویند .

علامت درجه و دقیقه و ثانیه ، بطوری که می‌دانید ° و ′ و ″ است که درگوشهٔ راست و بالای اندازهٔ زاویه می‌گذارند . مانند :

$$۱۲^\circ \quad ۱۵' \quad ۳۲''$$

که خوانده می‌شود ۱۲ درجه و۱۵ دقیقه و ۳۲ ثانیه .

۳۰ - گراد و اجزای آن - گراد $\frac{۱}{۱۰۰}$ زاویهٔ قائمه است. اجزای گراد عددهای اعشاری هستند و بعد از ممیز نوشته می‌شوند . گاهی $\frac{۱}{۱۰۰}$ گراد را دقیقهٔ صد قسمتی و $\frac{۱}{۱۰۰}$ دقیقهٔ صد قسمتی را ثانیهٔ صد قسمتی می‌گویند . علامت گراد G است که در طرف راست اندازهٔ زاویه می‌گذارند .

۳۱ - رابطهٔ بین درجه و گراد - ۹۰ درجه و ۱۰۰ گراد ، هردو ، یك قائمه‌اند . پس هردرجه مساوی $\frac{۱۰۰}{۹۰}=\frac{۱۰}{۹}$ گراد است . بنابراین اگر بخواهیم زاویه‌ای را که برحسب درجه بیان شده است به گراد تبدیل کنیم، کافی است اندازهٔ درجه را در $\frac{۱۰}{۹}$ ضرب کنیم.

مثال : زاویهٔ ۵۴°، به‌این ترتیب به‌گراد تبدیل می‌شود :

$$۵۴\times\frac{۱۰}{۹}=\frac{۵۴۰}{۹}=۶۰G$$

همچنین زاویهٔ $۱۸^\circ\ ۲۷'$، به این ترتیب به‌گراد تبدیل می‌شود :

$$۱۸\times\frac{۱۰}{۹}+\frac{۲۷}{۶۰}\times\frac{۱۰}{۹}=۲۰+\frac{۳۰}{۶۰}=۲۰+\frac{۱}{۲}=۲۰٫۵G$$

و نیز یك گراد مساوی $\frac{۹۰}{۱۰۰}=\frac{۹}{۱۰}=۰٫۹$ درجه است.

بنابراین برای اینکه زاویه‌ای را که برحسب گراد بیان شده است برحسب درجه بیان کنیم، کافی است اندازهٔ گراد را در ۰٫۹ ضرب کنیم.

مثال : زاویهٔ ۶۰ گراد برحسب درجه چنین می‌شود :

$$۶۰\times۰٫۹=۵۴^\circ \qquad (۱)$$

ونیز ۲۰٫۵ گراد برحسب درجه چنین می‌شود :

$$۲۰/۵ \times ۰/۹ = ۱۸^\circ/۴۵ \qquad (۲)$$

وچون $\frac{۴۵}{۱۰۰}$ را به کسری که مخرجش ۶۰ است تبدیل کنیم :

$$\frac{۴۵}{۱۰۰} = \frac{x}{۶۰}$$

$$x = ۲۷'$$

پس : $۲۰/۵G = ۱۸^\circ\, ۲۷'$

همیشه بیاد داشته باشید که : $\boxed{\frac{\text{گراد}}{۱۰۰} = \frac{\text{درجه}}{۹۰}}$

و از این رابطه برای تبدیل یکی به دیگری استفاده کنید .

خلاصهٔ مطالب مهم :

۱ ـ دو نیم‌خط که مبدأ مشترك داشته باشند، شکلی می‌سازند که زاویه نام دارد .

۲ ـ زاویهٔ نیم‌صفحه، زاویه‌ای است که دو ضلعش برامتداد یکدیگرند .

۳ ـ همهٔ زاویه‌های نیم‌صفحه باهم برابرند .

۴ ـ نیمساز زاویه، خطی است که ازرأس آن بگذرد وآن را به دو زاویهٔ متساوی تقسیم کند . هرزاویه فقط یك نیمساز دارد .

۵ ـ نصف زاویهٔ نیم‌صفحه را زاویهٔ قائمه نامند . همهٔ زوایای قائمه با هم برابرند .

۶ ـ زاویهٔ کوچکتر از نیم‌صفحه را محدب و زاویهٔ بزرگتر ازنیم‌صفحه را مقعرگویند .

۷ ـ دو زاویه را مجاور گویند در صورتی که رأس و یك ضلع مشترك داشته و اضلاع غیرمشترکشان در دوطرف ضلع مشترك واقع باشند .

۸ ـ دو زاویه را متمم‌گویند وقتی‌که مجموعشان یك قائمه باشد .

۹ ـ دو زاویه را مکمل‌گویند وقتی‌که مجموعشان دو قائمه باشد .

۱۰ ـ دو زاویهٔ مجاور ومکمل را مجانب‌گویند .

۱۱ ـ اضلاع غیر مشترك دو زاویهٔ مجانب، برامتداد یکدیگرند .

۱۲ ـ نیمسازهای دو زاویهٔ مجانب، برهم عمودند .

۱۳ ـ هرگاه اضلاع زاویه‌ای برامتداد اضلاع زاویه‌ای دیگرباشد، دو زاویه را متقابل به رأس گویند .

۱۴ ـ دو زاویهٔ متقابل به رأس، متساویند .

۱۵ ـ امتداد نیمساز هرزاویه ، زاویهٔ متقابل به رأس آن را هم نصف می‌کند .

۱۶ ـ دوخط را برهم عمودگویند وقتی‌که زاویهٔ قائمه بسازند .

۱۷ ـ ازیك نقطه فقط یك عمود می‌توان بریك خط رسم‌کرد .

۱۸ ـ $\frac{۱}{۹۰}$ قائمه را درجه و $\frac{۱}{۶۰}$ درجه را دقیقه و $\frac{۱}{۶۰}$ دقیقه را ثانیه می‌نامند .

۱۹ ـ $\frac{۱}{۱۰۰}$ قائمه را گراد می‌نامند .

۲۰ ـ اجزای‌گراد، دهم گراد وصدم گراد و ... است .

تمرین

۱ ـ نیمسازهای دو زاویهٔ مجاور و متمم، باهم چه زاویه‌ای می‌سازند ؟

۲ ـ اگر دو زاویهٔ مجاور مکمل باشند ، زاویهٔ بین نیمسازهای آنها چقدر است ؟

۳ـ اگر دو زاویهٔ مجاور ۴۵° و۳۵° باشند،زاویهٔ بین نیمسازهای این دو زاویه چقدر است ؟

۴ ـ متمم زاویه‌ای سه برابرآن است ؛ آن زاویه چقدر است ؟

۵ ـ تفاضل دو زاویهٔ متمم ۳۹° است ؛ هر یك چقدر است ؟

۶ ـ تفاضل دو زاویهٔ مکمل ۹۰° است ؛ هریك چقدر است؟

۷ ـ از دو زاویهٔ مکمل یکی هشت برابر دیگری است ؛ هر یك چقدر است ؟

۸ ـ زاویهٔ حادهٔ AOB را بسازید ؛ از O نیم‌خط OA' را بر OA و نیم‌خط OB' را بر OB عمود کنید بقسمی که سه نیم‌خط OA' ، OB' و OB دریك طرف OA یا امتدادآن باشند ؛ ثابت‌کنیدکه :

I) $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$

II) نیمسازهای‌آنها برهم عمودند . اگر $\widehat{AOB}$ منفرجه باشد ، مسئله

به چه صورت تبدیل می‌شود ؟

۹ ـ زاویه‌های زیر را که به یکی از دو واحدگراد و درجه نموده شده است، برحسب واحد دیگری بیان‌کنید :

۱۲' ۴" ؛ ۳۷° ۱۵' ۲۹" ؛ ۲۷° ۴۵' ۳۷" ؛ ۱۲° ۴۵' ۴۲"

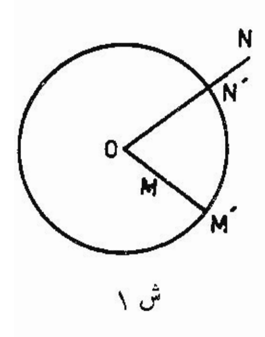
۲۱۲٫۰۰۲۵ گراد   ۷٫۳۰۵ گراد   ۱۲ گراد

۵/۰۰۵۰ گراد   ۴۳٫۸۵ گراد

۱۰ ـ از دو زاویهٔ مکمل یکی ۷ برابر دیگری است ؛ هر یك چند گراد است ؟

فصل چهارم

دایره



ش ۱

۱ - دایره خط منحنی مسطح بسته‌ای است که تمام نقاطش از نقطهٔ ثابتی واقع در صفحهٔ آن، به یك فاصله باشند.

نقطهٔ ثابت را **مرکز دایره**، O (شکل ۱)، و اندازهٔ فاصلهٔ مشترك نقاط منحنی از مرکز را که مقدار ثابتی می‌باشد، **شعاع دایره** می‌نامند و معمولاً آن را به R نمایش می‌دهند. هر نقطه که فاصله‌اش از مرکز دایره به اندازهٔ شعاع باشد، روی دایره است؛ و هر نقطه که روی دایره باشد، فاصله‌اش از مرکز به اندازهٔ شعاع است؛ پس نقاطی که روی دایره نیستند، فاصله‌شان هم از مرکز به اندازهٔ شعاع نیست.

منحنی دایره صفحه را به دو ناحیه تقسیم می‌کند که این منحنی حد فاصل آنهاست. ناحیه‌ای را که شامل مرکز دایره است، ناحیهٔ **درون دایره** و ناحیهٔ دیگر را ناحیهٔ **بیرون دایره** می‌خوانند.

فرض می‌کنیم که M نقطه‌ای باشد در ناحیهٔ درون دایره؛ امتداد OM دایره را در M' قطع می‌کند، $OM' = R$ و $OM < OM'$، یعنی:

$$OM < R$$

پس: فاصلهٔ هر نقطه که درون دایره باشد از مرکز دایره، کوچکتر است از شعاع آن دایره.

و نیز اگر نقطهٔ N را در ناحیهٔ بیرون دایره فرض کنیم ، ON دایره را در N' قطع می‌کند و $ON > ON'$ یعنی $ON > R$ پس :
فاصله هر نقطه که بیرون دایره باشد از مرکز دایره، بزرگتر است از شعاع آن دایره .

دایره را معمولاً به نام مرکزش می‌خوانند مانند دایرهٔ O (شکل ۲) .

۲ ـ قطر ـ هرخط مانند AB (شکل ۲) که برمرکزدایره بگذرد و از دو طرف به دایره محدود شود ، **قطر** نامیده می‌شود ؛ قطر دو برابر شعاع است .

ش ۲

هرگاه صفحهٔ دایره را درحول قطر دایره تاکنیم، دو جزء دایره برهم منطبق می‌شوند ؛ زیرا که اگر قرار باشد یك نقطه از یك جزء ، برجزء دیگر واقع نشود ، یا در درون دایره است یا در خارج آن ودر هردو صورت، فاصله‌اش از O نمی‌تواند مساوی R باشد ، در صورتی که مساوی R است؛ پس دوجزء دایره برهم منطبق می‌شوند و باهم‌مساویند.
بنابراین : **هرقطر ، دایره را نصف می‌کند .**

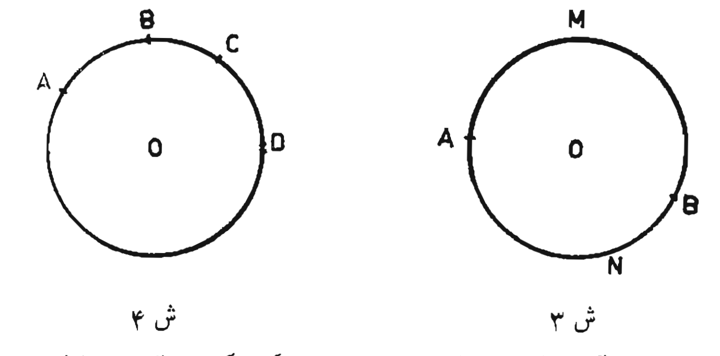
۳ـ دایره های متساوی ـ همهٔ دایره هایی که با یك شعاع رسم شوند، با هم مساویند ؛ زیرا که اگر مرکزهای آنها را برروی هم قرار دهیم، خودآنها برهم منطبق می‌شوند .

کمان یا قوس ، وتر ، زاویهٔ مرکزی

۴ ـ قوس ـ قسمتی از دایره که با دو نقطهٔ A و B از آن دایره

محدود شود ، قوس یا کمان AB نامیده می‌شود . چون بین A و B دو قوس وجود دارد ، برای تمیز دادن آنها از یکدیگر هریك را با سه حرف می‌خوانیم ؛ مانند قوس AMB و قوس ANB در شکل ۳ . علامت قوس ⌒ است و $\widehat{AMB}$ یعنی کمان AMB . هروقت که قوس با دوحرف خوانده شود، مراد قوس کوچکتری است که بین آن‌دو حرف قرار دارد .

۵ ـ وتر ـ پاره‌خطی که دو انتهای قوسی را به هم مربوط می‌سازد، وتر است .



ش ۴   ش ۳

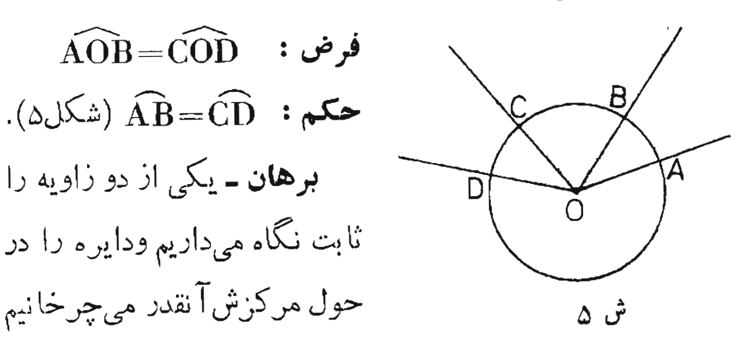
۶ ـ قوسهای متساوی ـ فرض می‌کنیم که دو قوس AB و CD (شکل ۴) با یکدیگر برابر باشند و بخواهیم آنها را برهم منطبق سازیم؛ دایرهٔ O را چرخی فرض کنید که درحول محوری که برمرکزش گذشته و برصفحهٔ آن عمود باشد دوران کند ؛ بسهولت درك می‌کنید که دایرهٔ محیط این چرخ پیوسته برروی خودش تغییر مکان می‌دهد. حالا فرض کنید که $\widehat{CD}$ را ثابت نگاهداریم ودایره را آنقدر درحول مرکزش بچرخانیم که A بر C واقع شود؛ چون دوقوس متساویند، B هم بر D قرار می‌گیرد و دوقوس متساوی ، بریکدیگر منطبق می‌شوند .

اگر بخواهیم دوقوس متساوی از دو دایرهٔ متساوی‌را برهم منطبق کنیم ، مراکز دوایر را منطبق می‌سازیم ، بدیهی است دو دایره برهم واقع می‌شوند؛ حال یکی از دوایر را درحول مرکز آنقدر می‌چرخانیم که قوسهای متساوی ، مانند قوسهای AB و CD در (شکل ۴)، برهم منطبق شوند .

۷ ـ جمع و تفریق قوسها ـ جمع و تفریق قوسها ، شبیه به جمع و تفریق پاره‌خطهاست . در شکل ۴ ، $\widehat{AC}=\widehat{AB}+\widehat{BC}$ و $\widehat{AB}=\widehat{AC}-\widehat{BC}$.

۸ ـ زاویهٔ مرکزی ـ هرزاویه که رأسش در مرکز دایره باشد ، **زاویهٔ مرکزی** نام دارد . قوسی از دایره که بین نقاط تقاطع دایره یا اضلاع یك زاویهٔ مرکزی محصور است، **قوس مقابل** آن زاویهٔ‌مرکزی است و آن زاویه هم زاویهٔ مرکزی مقابل به‌آن قوس نامیده می‌شود

۹ـ قضیه ـ هرگاه در دایره‌ای دو زاویهٔ مرکزی متساوی باشند ، قوسهای مقابلشان نیز متساویند .



ش ۵

فرض : $\widehat{AOB}=\widehat{COD}$

حکم : $\widehat{AB}=\widehat{CD}$ (شکل۵).

برهان ـ یکی از دو زاویه را ثابت نگاه می‌داریم ودایره را در حول مرکزش آنقدر می‌چرخانیم تا یك ضلع زاویهٔ دیگر بریك ضلع زاویهٔ ثابت قرار گیرد و دو زاویه در یك طرف آن ضلع واقع شوند ؛ بدیهی است که چون دو زاویه متساویند ، اضلاع دیگرشان نیز برروی هم قرار می‌گیرند ؛ درنتیجه

نقاط A و C برهم و نقاط B و D نیز برهم واقع شده و کمانهای AB و CD برهم منطبق می‌شوند؛ یعنی دوقوس، متساویند .

۱۰ ـ قضیهٔ عکس ـ هرگاه در دایره‌ای دوقوس متساوی باشند ، زاویه‌های مرکزی مقابلشان متساویند .

فرض : $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ (شکل ۵) .

حکم : $\widehat{AOB}=\widehat{COD}$.

برهان ـ یك قوس را ثابت نگاه می‌داریم و دایره را آنقدر در حول مرکزش می‌چرخانیم تا قوس دیگر برقوس ثابت منطبق شود؛ در نتیجه دو زاویهٔ مرکزی بریکدیگر منطبق می‌شوند ، یعنی متساویند .

۱۱ ـ نتیجه ـ هرقطر ، دایره را به دوقوس متساوی تقسیم می‌کند که هریك ازآنها مقابل به یك زاویهٔ نیم‌صفحه است.

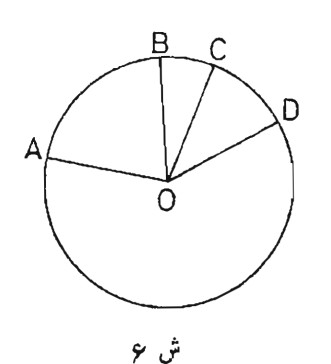
۱۲ ـ قضیه ـ هرگاه دردایره‌ای دو زاویهٔ مرکزی متساوی نباشند ، قوس مقابل به زاویهٔ بزرگتر ، بزرگتر است از قوس مقابل به‌زاویهٔ کوچکتر (شکل ۶) .

فرض : $\widehat{AOB}>\widehat{COD}$

حکم : $\widehat{AB}>\widehat{CD}$

برهان ـ اگر دایره را آنقدر بچرخانیم که OC بر OA قرار گیرد و دو زاویه در یك طرف OA واقع شوند ، ضلع OD در درون زاویهٔ AOB می‌افتد ونقطهٔ D بین A و B واقع می‌شود، یعنی:

$$\widehat{AB}>\widehat{CD}$$



ش ۶

۱۳ ـ قضیهٔ عکس ـ هرگاه در دایره‌ای دوقوس نامتساوی باشند، قوس بزرگتر مقابل است به زاویهٔ مرکزی بزرگتر .

فرض : $\widehat{AB} > \widehat{CD}$ (شکل ۶) .

حکم : $\widehat{AOB} > \widehat{COD}$.

برهان ـ اگر $\widehat{AOB}$ از $\widehat{COD}$ بزرگتر نباشد، یا با آن مساوی است یا از آن کوچکتر است ؛ هرگاه $\widehat{AOB}=\widehat{COD}$ باشد ، $\widehat{AB}=\widehat{CD}$ و این خلاف فرض است؛ و اگر $\widehat{AOB}<\widehat{COD}$ باشد ، $\widehat{AB}<\widehat{CD}$ و این نیز خلاف فرض است ؛ پس بناچار $\widehat{AOB}>\widehat{COD}$ است.

۱۴ ـ طریقهٔ استدلال خلف ـ استدلال قضیهٔ شمارهٔ ۱۳ را بار دیگر با دقت مطالعه کنید ؛ می‌بینید که این طرز استدلال با استدلال سایر قضایا تفاوت دارد . در قضایای دیگر خاصیتی را که می‌خواستیم ثابت‌کنیم، مستقیماً ثابت می‌کردیم؛ اما در این قضیه مستقیماً ثابت نکردیم که $\widehat{AOB}$ از $\widehat{COD}$ بزرگتر است ، بلکه نشان دادیم که $\widehat{AOB}$ نه می‌تواند با $\widehat{COD}$ مساوی باشد و نه از آن کوچکتر ، پس بناچار از آن بزرگتر است .

این طرز استدلال را ، که به جای اثبات مستقیم قضیه‌ای ، ثابت می‌کنیم که **خلاف حکم آن** درست نیست، **خلف** یا **برهان خلف** می‌نامند. طریقهٔ برهان خلف در بسیاری از قضایا بکار می‌رود .

زاویه و دایره

۱۵ ـ دو خط عمود برهم D و D' چهار زاویهٔ قائمه به رأس O می‌سازند (شکل ۷) . به مرکز O و شعاع اختیاری R دایره‌ای رسم می‌کنیم .

از تقاطع D و D' با این دایره چهارقوس متساوی تشکیل می‌شود؛ زیرا که زاویه‌های مرکزی آنها با هم مساوی هستند . هریك از قوسها $\frac{1}{4}$ دایره است . اگر دایره‌های دیگری هم به مرکز O رسم‌کنیم، قوس هریك از آنها‌که بین دو خط D و D' محدود شود، $\frac{1}{4}$ همان دایره است (گاهی به جای دایره گفته می‌شود **محیط دایره**) نیمسازهای زوایای دو خط را رسم می‌کنیم تا دایره‌ها را قطع‌کنند. قوسی که‌بین هریك ازاین نیمسازهاو هریك‌ازدوخط D و D' محدود می‌شود، $\frac{1}{8}$ محیط دایره است .

ش ۷

به همین ترتیب هرچه زاویه‌ها راکوچکتر کنیم قوسهاکوچکتر می‌شوند. اگر زاویه‌های یك درجه‌ای جداکنیم، هریك از ۴ زاویهٔ قائمه به ۹۰ زاویهٔ یك درجه‌ای تقسیم می‌شود و هرچهار زاویهٔ قائمه با هم دایره را به ۳۶۰ قوس متساوی تقسیم می‌کنند که هریك $\frac{1}{360}$ آن دایره است . $\frac{1}{360}$ هردایره را واحد قوس همان دایره اختیار کرده‌اند .

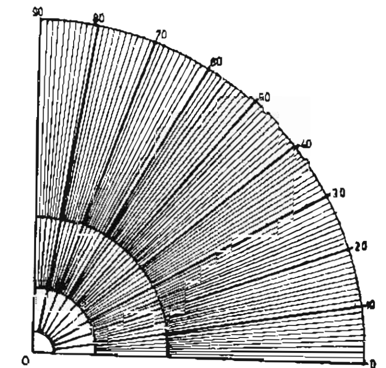
به مناسبت رابطه‌ای‌که بین زاویهٔ مرکزی و قوس مقابلش وجود دارد، واحد قوس را به همان نام واحد زاویه، یعنی **درجه** ، نامیده‌اند. پس دایره ، مساوی ۳۶۰ قوس یك درجه است . $\frac{1}{60}$ قوس یك درجه را قوس یك دقیقه و $\frac{1}{60}$ قوس یك دقیقه را قوس یك ثانیه می‌گویند .

دقت‌کنید ! معمولا در بیان **درجهٔ زاویه** (واحد زاویه) و **درجهٔ**

قوس (واحد قوس) ، نوع درجه را نمی‌گویند ؛ یعنی درجهٔ زاویه و درجهٔ قوس ، هردو را مطلقاً درجه می‌گویند . شما باید سعی کنید که آنها را با هم اشتباه نکنید .

همانطور که برای زاویه واحدی بنام **گراد** بکار می‌رود که $\frac{1}{100}$ زاویهٔ قائمه است ، برای واحد قوس هم از **گراد قوس** استفاده می‌شود و آن $\frac{1}{400}$ محیط دایره است .

۱۶ ـ مکان هندسی ـ در هندسه ، گاهی به عدهٔ بیشماری نقاط برمی‌خوریم که خصیصه ، یا صفت ، مشترکی دارند . مانند نقاط دایره که همه از نقطهٔ ثابتی به فاصلهٔ R هستند .



ش ۸

مجموع نقاطی که دارای یك خصیصه یا صفت مشترك باشند ، شکلی بوجود می‌آورند؛ این شکل را **مکان هندسی** نقاطی که دارای آن صفت هستند می‌نامند ؛ بنابراین دایره را می‌توان چنین تعریف کرد :

دایره مکان هندسی نقاطی است که از یك نقطهٔ ثابت به نام مرکز، به فاصلهٔ ثابتی موسوم به شعاع باشند .

مکانهای هندسی دارای اهمیت بسیاری هستند و از آنها برای حل مسائل زیاد استفاده می‌شود. برای اینکه شکلی مکان هندسی باشد، باید:

اولاً ــ تمام نقاط آن دارای صفت مشترك باشند .

ثانیاً ــ هر نقطه‌ای که دارای آن صفت باشد، برروی آن شکل

باشد . یعنی در حقیقت هم اصل قضیه درست باشد و هم عکس آن . به عبارت دیگر ، برای آن خاصیت شرط لازم و کافی موجود باشد .

مثلاً دایره یك **مکان هندسی** است ؛ زیرا که اگر شعاع آن را R بنامیم، اولاً هر نقطهٔ آن ازمرکز به فاصلهٔ R است و ثانیاً هر نقطه که از مرکز به فاصلهٔ R باشد، روی آن است .

خلاصهٔ مطالب مهم :

۱ ـ دایره ، خط منحنی مسطّح بسته‌ای است که تمام نقاطش از نقطهٔ ثابتی واقع در صفحهٔ آن، به یك فاصله باشند . نقطهٔ ثابت را مرکز و اندازهٔ فاصلهٔ مشترك نقاط منحنی ازمرکز را شعاع می‌گویند .

۲ ـ هرخط که از مرکز دایره بگذرد و به دایره محدود باشد ، قطر دایره نامیده می‌شود .

۳ ـ هرقطر، دایره را نصف می‌کند .

۴ ـ قسمتی از دایره‌که به دونقطه محدود شود، قوس دایره است .

۵ ـ زاویهٔ مرکزی زاویه‌ای است‌که رأسش مرکز دایره باشد .

۶ ـ اگر در یك دایره دو قوس متساوی باشند ، دو زاویهٔ مرکزی مقابلشان متساویند .

۷ ـ هرگاه دریك دایره دو زاویهٔ مرکزی متساوی باشند ، قوسهای مقابل آنها متساویند .

۸ ـ هرگاه دریك دایره دو زاویهٔ مرکزی متساوی نباشند ، قوس مقابل به زاویهٔ بزرگتر ، بزرگتر است ازقوس مقابل به زاویهٔ‌کوچکتر .

۹ ـ مجموع نقاطی که دارای یك خاصیت مشترك باشند، شکلی بوجود می‌آورند . این شکل را مکان هندسی نقاطی که دارای آن خاصیت هستند می‌نامند .

۱۰ ـ دایره ، مکان هندسی نقاطی است که از یك نقطهٔ ثابت به نام مرکز، به فاصلهٔ ثابتی باشند .

تمرین

۱ ـ این کمانها را که به واحدهای پایین‌تر داده شده‌اند ، به واحدی

بالاتر تبدیل کنید :

۳۴۲۲′ ۱۷۲′ ۲۷۴۲″ ۳۶۵′

۲ ـ حاصل این کمانها را تعیین کنید :

۵″ ۴۲′ ۴۳° + ۳۲″ ۱۵′ ۱۲°

۴۹″ ۵۶′ + ۵″ ۶°

۳۶″ ۴′ ۱۵° + ۴۵″ ۱۲′ ۱۱۳°

۳ ـ این کمانها را به گراد تبدیل کنید :

۲۳° ۱۵′ ، ۱۳۰° ۳۶′ ، ۳۷° ۴۵′

۴ ـ این کمانها را به درجه و اجزای آن تبدیل کنید :

۱۱۵٫۸۳ گراد ، ۳۹٫۹۴ گراد ، ۷۳٫۲۸ گراد ، ۵۳٫۲۵ گراد .

۵ ـ این کمانها را دو بدو با هم بسنجید و تعیین کنید کدام بزرگتر است :

۱۷° ۱۵′ با ۲۴٫۸۶ گراد ، ۵۶ گراد با ۴۹° ، ۶۵° با ۷۳ گراد .

۶ ـ تعیین کنید این کمانها چند درجه‌اند :

$\frac{۱}{۸}$ دایره ، $\frac{۱}{۲۴}$ دایره ، $\frac{۱}{۳۶}$ دایره ، $\frac{۱}{۷۲}$ دایره ، $\frac{۱}{۶۰}$ دایره .

۷ ـ تعیین کنید هریك ازکمانهای تمرین بالا چندگراد است .

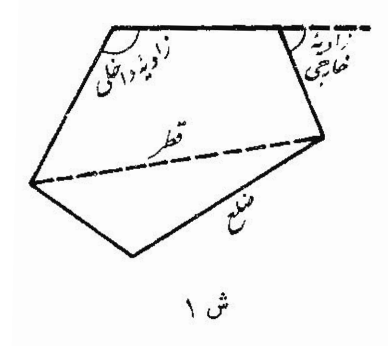
۸ ـ در مدتهای زیر عقربهٔ دقیقه‌شمار ساعت، چند درجه طی می‌کند ؟
یك ساعت و ۱۲ دقیقه ، ۳۷ دقیقه ، ۴۵ دقیقه ، ۲ ساعت و ۱۷ دقیقه .

۹ ـ عقربهٔ ساعت شمار: در هرساعت چند درجه طی می‌کند ؟ هردرجه را درچه‌مدت طی می‌کند؟ کمانی‌که درمدت ۲۸ دقیقه طی می‌کند چقدر است؟ درچه مدت کمان ۱۲′ طی می‌کند ؟

فصل پنجم

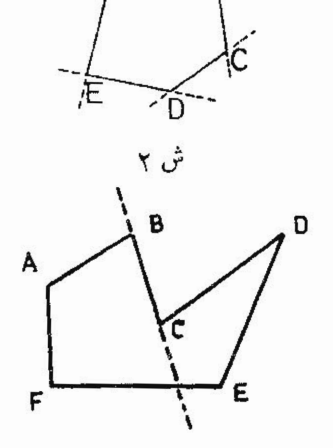
چند ضلعی و مثلث

۱ - چند ضلعی، خط شکستهٔ بسته‌ای است. هریك از پاره‌خطها را یك **ضلع** ، نقطهٔ تقاطع هردوضلع متوالی را یك **رأس** ، زاویهٔ واقع بین هردوضلع متوالی‌را یك **زاویهٔ داخلی** ، زاویهٔ بین هرضلع و امتداد ضلع مجاور آن‌را یك **زاویهٔ خارجی** و هرخط را که دو رأس غیرمجاوررا به‌یکدیگرمربوط کند، یك **قطر** چندضلعی می‌گویند (شکل ۱) .



ش ۱

چندضلعی ممکن است **محدب** یا **مقعر** باشد؛ چندضلعی محدب آن است که امتداد هیچیك از اضلاعش در داخل آن قرار نگیرد ، یا آنکه خط قاطع غیرمشخصی آن را فقط در دو نقطه قطع کند (شکل ۲) . در چند ضلعی مقعر امتداد برخی از اضلاع در داخل شکل واقع می‌شود (شکل ۳) .

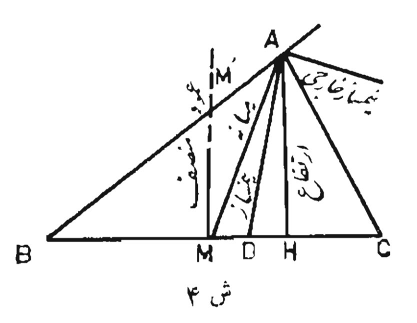


ش ۳

نام چندضلعی از روی تعداد ضلعهای آن معین می‌شود ؛ مانند

پنج ضلعی ، هفت ضلعی ، دوازده ضلعی . فقط سه ضلعی و برخی چهار ضلعیها نام مخصوص دارند .

۲ ـ مثلث و اجزای آن ـ ساده‌ترین چند ضلعیها ، سه ضلعی است که آن را مثلث گویند . مثلث سه ضلع ، سه رأس و سه زاویه دارد . خطی مانند AH ، که از یك رأس مثلث عمود برضلع روبروی آن فرود آید، **ارتفاع** نظیر آن رأس مثلث، یا ارتفاع وارد بر آن ضلع، خوانده می‌شود. خطی مانند AM که یك رأس را به وسط ضلع مقابل آن وصل کند، **میانهٔ** مثلث نظیر آن ضلع است. خطی که زاویهٔ داخلی مثلث را نصف کند، **نیمساز زاویهٔ داخلی** است. **نیمساز زاویهٔ خارجی،** خطی است که زاویهٔ خارجی مثلث را نصف کند . **عمود منصف** هرضلع مثلث خطی است که در وسط آن ضلع مثلث، بر آن ضلع عمود شود (شکل ۴) .



ش ۴

سه ضلع و سه زاویه را **اجزای اصلی** مثلث وسایر اجزا ، مانند سه ارتفاع ، سه میانه ، سه نیمساز زاویهٔ داخلی ، سه نیمساز زاویهٔ خارجی وسه عمود منصف را **اجزای فرعی** مثلث می‌نامند .

هریك از زوایای مثلث را با یك حرف بزرگ و ضلع روبروی آن را با همان حرف ، اما کوچك ، نمایش می‌دهند ، مانند ضلع a که روبروی زاویهٔ A است .

۳ ـ انواع مثلث ـ اگر سه ضلع مثلثی متساوی باشند ، مثلث **متساوی‌الاضلاع** واگر فقط دوضلع آن متساوی باشند، **متساوی‌الساقین** است . هریك از دو ضلع متساوی را **یك ساق** و ضلع دیگر را قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین می‌نامند . اگر یك زاویهٔ مثلثی قائمه باشد، مثلث را **قائم‌الزاویه** و در این صورت ، ضلع روبروی زاویهٔ قائمه را **وتر** می‌نامند .

خواص مثلث متساوی‌الساقین

۴ ـ قضیه ـ در مثلث متساوی‌الساقین زاویه های روبروی دو ساق با هم برابرند .

فرض : $AB=AC$ (شکل ۵) .

حکم : $\hat{C}=\hat{B}$

برهان ـ مثلث ABC را برمی‌گردانیم تا به وضع $A_1B_1C_1$ در آید . بدیهی است که $A_1B_1=AB=AC=A_1C_1$. مثلث $A_1B_1C_1$ را بر روی ABC منتقل می‌کنیم بطوری که اضلاع زاویهٔ A_1 بر اضلاع زاویهٔ A واقع شوند. مسلم است که دراین صورت $\hat{C}_1$ روی $\hat{B}$ و $\hat{B}_1$ روی $\hat{C}$ قرار می‌گیرد و دو مثلث منطبق می‌شوند ، پس $\hat{B}_1=\hat{C}$ ؛ اما $\hat{B}_1$ در حقیقت $\hat{B}$ است ، بنابراین :

$$\hat{B}=\hat{C}$$

ش ۵

۵ - قضیهٔ عکس - اگر در مثلثی دو زاویه متساوی باشند، مثلث، متساوی‌الساقین است.

فرض : $\hat{B}=\hat{C}$ (شکل ۵) .

حکم : $AC=AB$

برهان - باز مثلث ABC را برمی‌گردانیم تا به وضع $A_1B_1C_1$ درآید. با توجه به فرض قضیه مسلم است که :

$$\hat{B}_1=\hat{B}=\hat{C}=\hat{C}_1$$

حال مثلث $A_1B_1C_1$ را بر ABC نقل می‌کنیم بقسمی که B_1 بر C و C_1 بر B واقع شوند. از تساوی دو زاویهٔ B_1 و C، لازم می‌آید که B_1A_1 بر روی CA واقع شود ؛ به دلیل مشابه C_1A_1 روی BA قرار می‌گیرد ، در نتیجه A_1 هم بر روی A می‌افتد و دو مثلث منطبق می‌شوند ، پس $A_1C_1=AB$ ؛ اما A_1C_1 همان AC است، بنابراین : $AC=AB$.

حالتهای تساوی دو مثلث

۶- دو مثلث درسه حالت با هم برابرند : **حالت اول** ، وقتی که دوضلع و زاویهٔ بین آنها از یك مثلث با دو ضلع وزاویهٔ بین آنها از مثلث دیگر برابر باشند (ض ز ض) . **حالت دوم** ، وقتی که دو زاویه و ضلع بین آنها از یك مثلث با دو زاویه و ضلع بین آنها از مثلث دیگرمساوی باشند (ز ض ز) . **حالت سوم** ، وقتی که سه ضلع یك مثلث با سه ضلع مثلث دیگر مساوی باشند (ض‌ض‌ض) .

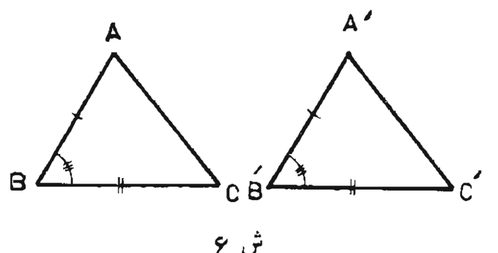
۷ - حالت اول - قضیه - اگر دوضلع و زاویهٔ بین آنها از یك

مثلث با دو ضلع و زاویهٔ بین آنها از مثلث دیگر مساوی باشند ، دومثلث متساویند .

فرض : $A'B'=AB$ (شکل ۶) ، $\hat{B}'=\hat{B}$ ، $B'C'=BC$

حکم : $\Delta ABC=\Delta A'B'C'$

برهان - $A'B'C'$ را بر ABC نقل می‌کنیم بقسمی که $B'C'$ بر BC منطبق شود و هردو مثلث در یك طرف BC باشند . از تساوی $\hat{B}$ و $\hat{B}'$ لازم می‌آید که $B'A'$ روی BA واقع شود ، و چون با آن مساوی است ، A' بر روی A قرار می‌گیرد و دو مثلث بریکدیگر منطبق می‌شوند ، یعنی باهم برابرند .

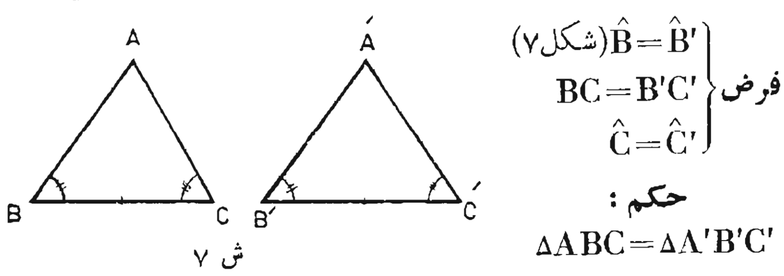


ش ۶

۸ - حالت دوم - قضیه - اگر دو زاویه وضلع بین‌آنها از مثلثی با دوزاویه وضلع بین‌آنها از مثلث دیگر برابر باشند، دومثلث متساویند.

فرض : $\hat{B}=\hat{B}'$ (شکل ۷) ، $BC=B'C'$ ، $\hat{C}=\hat{C}'$

حکم : $\Delta ABC=\Delta A'B'C'$



ش ۷

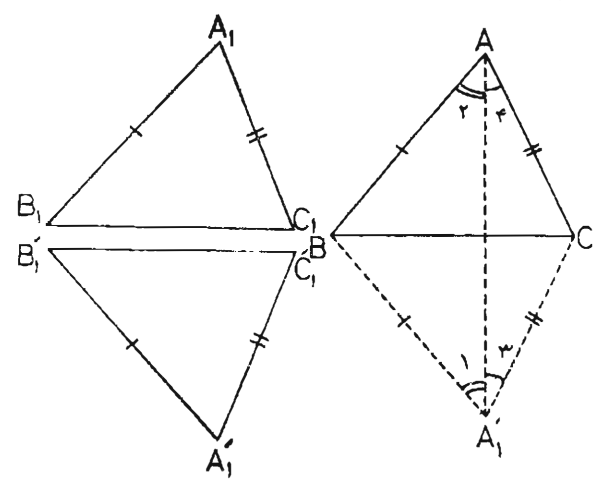
برهان - $B'C'$ را بر BC منطبق می‌کنیم . از مساوی بودن $\hat{C}'$ و $\hat{C}$ نتیجه می‌گیریم که $C'A'$ برروی CA واقع می‌شود. به دلیل مشابه $B'A'$ بر BA قرار می‌گیرد، پس A' بر A ودر نتیجه مثلث $A'B'C'$

بر ABC منطبق می‌شود و دو مثلث متساویند .

۹ ـ حالت سوم ـ قضیه ـ اگر سه ضلع مثلثی با سه ضلع مثلثی دیگر مساوی باشند ، دو مثلث متساویند (شکل ۸).

فرض : $A_1B_1 = AB$ ، $B_1C_1 = BC$ ، $A_1C_1 = AC$

حکم : $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$



ش ۸

برهان ـ $A_1B_1C_1$ را بر می‌گردانیم تا به شکل $A'_1B'_1C'_1$ درآید. $B'_1C'_1$ را برمساویش BC منطبق می‌کنیم. دو رأس A و A'_1 در دوطرف BC قرار می‌گیرند و شکل، به وضع ABA'_1C درمی‌آید. از A به A'_1 وصل می‌کنیم. چون $A'_1B = AB$، ABA'_1 مثلثی است متساوی الساقین و بالنتیجه $\hat{۲} = \hat{۱}$ ، و چون $A'_1C = AC$، $\hat{۴} = \hat{۳}$، پس $\hat{A}'_1 = \hat{A}$. اما $\hat{A}'_1$ همان $\hat{A}_1$ است، بنابراین $\hat{A}_1 = \hat{A}$ و دومثلث $A_1B_1C_1$ و ABC به حالت ض ز ض متساوی می‌شوند .

۱۰ ـ بطوری‌که دیدید دومثلث متساوی می‌شوند وقتی که سه‌جزء

اصلی یکی با سه جزء اصلی دیگری برابر باشند ؛ اما حتماً باید یکی از این سه جزء ، ضلع باشد .

۱۱ ـ تساوی دو مثلث قائم‌الزاویه ـ بدیهی است شرایطی را که برای تساوی دو مثلث غیر مشخص بیان کردیم ، در مورد مثلث قائم‌الزاویه نیز صحیح است . علاوه براین ، دو مثلث قائم‌الزاویه در حالتهای زیر نیز با هم مساویند :

الف ـ وقتی که وتر ویک زاویهٔ حاده‌شان با هم مساوی باشند .

ب ـ وقتی که وتر ویک ضلعشان با هم مساوی باشند .

۱۳ ـ قضیه ـ اگر وتر ویک زاویهٔ حادهٔ مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر ویک زاویهٔ حاده ازمثلث قائم‌الزاویهٔ دیگرمساوی باشند، دو مثلث متساویند (شکل ۹) .

فرض : $A'C' = AC$ و $\hat{A}' = \hat{A}$

$\hat{B}' = \hat{B} = ۹۰°$

حکم : $\Delta A'B'C' = \Delta ABC$

ش ۹

برهان ـ $A'C'$ را بر AC منطبق می‌کنیم؛ چون $\hat{A}'$ با $\hat{A}$ مساوی است، $A'B'$ برروی AB واقع می‌شود؛ و چون از C که C' بر آن منطبق شده است، نمی‌توان بیش از یك عمود بر AB که $A'B'$ بر آن قرارگرفته است فرودآورد، $B'C'$ و BC بریکدیگر قرار می‌گیرند و B' برB منطبق می‌شود؛ بنابراین دو مثلث متساویند .

۱۳ ـ قضیه ـ اگر وتر و یك ضلع مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر و یك ضلع مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگر مساوی باشند دو مثلث با هم برابرند (شکل ۱۰).

فرض : $BC=B'C'$ و $AC=A'C'$ و $\hat{B}=\hat{B'}=$ °۹۰

حکم : دومثلث ABC و $A'B'C'$ برابرند .

برهان ـ یکی از دو مثلث ، مثلا $A'B'C'$ ، را بر می‌گردانیم تا به وضع $A''B''C''$ درآید، آنگاه $B''C''$ را بر مساویش BC منطبق می‌کنیم بقسمی که A و A'' در دو طرف آن واقع شوند. $A''B''$ بر امتداد AB واقع می‌شود، زیرا که:

$\widehat{ABC} = \widehat{A''B''C''} =$ °۹۰

ش ۱۰

چون $AC = A''C''$ ، مثلث CAA'' متساوی‌الساقین است و دو زاویهٔ A و A'' متساوی می‌شوند؛ بنابراین وتر ویک زاویهٔ حاده از مثلث ABC با وتر و یک زاویهٔ حاده از مثلث $A'B'C'$ برابرند و به موجب قضیهٔ قبل، دومثلث متساویند.

۱۴ ـ قضیه ـ درمثلث متساوی‌الساقین نیمساز زاویهٔ رأس، برقاعده عمود است (شکل ۱۱).

فرض : $AB=AC$ و $\hat{۲}=\hat{۱}$

حکم : $AH \perp BC$

برهان ـ دو مثلث AHB و

ش ۱۱

AHC باهم مساویند؛ زیرا که ضلع AH درآنها مشترک است و $AB=AC$ و $\hat{۲}=\hat{۱}$، پس :

$\widehat{AHB}=\widehat{AHC}=\frac{1}{2}$ (زاویهٔ نیم صفحه) = °۹۰

۱۵ـ از تساوی دومثلث AHB و AHC این نتیجه‌ها هم گرفته می‌شود :

الف) $HB=HC$ ، یعنی AH **میانهٔ وارد برقاعده است .**

ب) AH عمود منصف BC است .

پس درمثلث متساوی الساقین نیمساز زاویهٔ رأس ، ارتفاع ، میانه وعمود منصف قاعده نیزهست .

۱۶ـ قضیهٔ عکس ـ اگر در مثلثی نیمساز زاویه‌ای بر ضلع مقابل عمود باشد ، مثلث متساوی‌الساقین است (شکل ۱۲) .

فرض: $\hat{۲}=\hat{۱}$ و $AH \perp BC$

حکم : $AB=AC$

برهان ـ $\triangle ABH = \triangle ACH$ ؛ به دلیل اینکه ضلع AH بین آنها مشترک است و زاویه‌های دو طرف AH متساویند، پس $AB=AC$ ، یعنی مثلث ABC متساوی الساقین است .

ش ۱۲

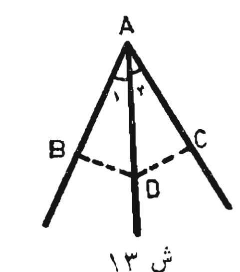
نقاط واقع بر نیمساز زاویه ـ نقاط واقع برعمود منصف یک پاره خط

۱۷ـ تعریف ـ فاصلهٔ نقطه ازخط، طول عمودی است که از آن نقطه

برخط فرودآید و به‌آن محدود شود .

۱۸ــقضیه ــ هر نقطهٔ واقع بر نیمساز زاویه‌ای ، از دو ضلع زاویه به‌یك فاصله است (شکل ۱۳) .

برهان ــ از نقطهٔ D واقع برنیمساز زاویهٔ A ، دو عمود DC و DB را بر دو ضلع زاویه فرود می‌آوریم . دو مثلث قائم‌الزاویهٔ DAB و DAC (به حالت تساوی وتر و یك زاویهٔ حاده) متساویند ، پس DB=DC .



ش ۱۳

۱۹ــقضیهٔ عکس ــ هرنقطه که از دو ضلع زاویه‌ای به‌یك فاصله باشد ، برنیمسازآن زاویه واقع است .

برهان ــ درشکل۱۴، اگر DC=DB باشد ، دومثلث قائم‌الزاویهٔ ACD وABD به حالت تساوی وتر و یك ضلع متساویند ، پس : $\hat{2}=\hat{1}$، یعنی AD نیمساز $\widehat{CAB}$ است .

ش ۱۴

ازقضیهٔ شمارهٔ ۱۸ وعکس‌آن به‌این نتیجه می‌رسیم که‌نیمساز هر زاویه ، **مکان هندسی نقاطی است که از دو ضلع زاویه به یك فاصله باشند .**

یا بطورکلی : **مکان هندسی نقاطی که از دو خط متقاطع به یك فاصله باشند ، عبارت‌است از دو نیمساز زاویه‌هایی که آن دو خط با یکدیگر تشکیل می‌دهند .**

۲۰ــ تعریف ــ عمود منصف یك پاره‌خط ، خطی‌است‌که در وسط پاره‌خط بر آن عمود باشد .

۲۱ــقضیه ــ هر نقطهٔ واقع بر روی عمود منصف یك پاره خط ، از دو سر پاره‌خط به‌یك فاصله است .

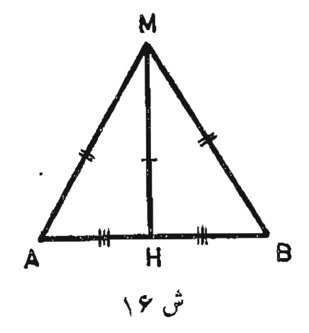
فرض : AH=HB و HD⊥AB و M نقطه‌ای ازHD است .

حکم : MA=MB (شکل ۱۵) .

برهان ــ وقتی‌که از هر نقطهٔ M واقع برHD به A و B وصل کنیم، دو مثلث MHA و MHB به‌حالت (ض‌زض) (HM مشترك، $\hat{1}=\hat{2}=90°$ و HA=HB) متساوی می‌شوند ودر نتیجه MA=MB.

ش ۱۵

۲۲ ــ قضیهٔ عکس ــ هر نقطه‌که از دو سر پاره‌خطی به یك فاصله باشد ، برعمود منصف آن پاره‌خط قرار دارد (شکل ۱۶) .



ش ۱۶

فرض : MA=MB.

حکم : M روی خط عمود بر وسط AB است .

برهان ــ دو مثلث MHA و MHB (H وسط AB است) به حالت ض‌ض‌ض متساویند ؛ (MH مشترك ، MA=MB و HA=HB) ؛ پس :

$\widehat{MHA}=\widehat{MHB}=\frac{1}{2}$(زاویهٔ نیم صفحه)$=90°$

۲۳ ــ از قضیهٔ شمارهٔ ۲۲ وعکس‌آن نتیجه می‌گیریم که :

عمود منصف یك پاره خط ، مکان هندسی نقاطی است که از دو سر آن پاره‌خط به‌یك فاصله باشند

خلاصهٔ مطالب مهم :

۱ــ هر خط شکستهٔ بسته را چند ضلعی می‌نامند . هریك از پاره خطها را ضلع ، نقطهٔ تقاطع دوضلع متوالی را رأس وزاویهٔ بین هر دو ضلع متوالی واقع دردرون چند ضلعی را زاویهٔ داخلی چند ضلعی می‌گویند .

۲ــ چند ضلعی‌را محدب‌گویند به شرط آنکه امتداد هیچیك از اضلاعش داخل‌آن قرارنگیرد . درغیراین‌صورت‌آن را مقعرگویند .

۳ــ سه ضلعی را مثلث‌گویند .

۴ــ خطی‌که ازرأس مثلث برضلع مقابل عمود شود ، ارتفاع نام دارد .

۵ــ خطی‌که ازرأس مثلث به وسط ضلع مقابل‌آن وصل شود ، میانه نام دارد .

۶ــ نیمساز هرزاویهٔ داخلی مثلث را نیمسازآن مثلث می‌نامند .

۷ــ سه ضلع وسه زاویه را اجزای اصلی مثلث گویند .

۸ــ اگر سه ضلع مثلثی متساوی باشند ، مثلث را متساوی‌الاضلاع ، و اگرفقط دوضلع آن متساوی باشند ، متساوی‌الساقین ، و اگر یك زاویهٔ مثلثی قائمه‌باشد ، مثلث را قائم‌الزاویه نامند .

۹ــ درهرمثلث متساوی‌الساقین ، دو زاویهٔ مقابل به‌دو ساق متساویند و بعکس‌اگردرمثلثی دوزاویه متساوی‌باشند ، مثلث متساوی‌الساقین‌است .

۱۰ــ در مثلث متساوی‌الساقین ، نیمساز زاویهٔ رأس و ارتفاع وارد بر قاعده ومیانهٔ قاعده وعمود منصف‌قاعده برهم منطبقند .

۱۱ــ اگردرمثلثی‌نیمساز یك زاویه ، ارتفاع یامیانه یاعمود منصف‌ضلع مقابل باشد ، یا عمود منصف یك ضلع ازرأس مقابل بگذرد ، مثلث متساوی ـ الساقین است .

۱۲ــ هرگاه دوضلع وزاویهٔ بین‌آنها ازمثلثی با دوضلع وزاویهٔ بین‌آنها ازمثلثی دیگرمتساوی باشند ، دومثلث متساویند (ض ز ض).

۱۳ــ هرگاه دوزاویه وضلع بین‌آنهاازمثلثی با دوزاویه وضلع بین‌آنها ازمثلثی دیگرمتساوی باشند ، دومثلث متساویند (ز ض ز) .

۱۴ــ هرگاه سه ضلع مثلثی با سه ضلع مثلثی دیگر متساوی باشند ، دو مثلث متساویند (ض‌ض‌ض) .

۱۵ــ هرگاه وتر ویك زاویه از مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر ویك زاویه

از مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگر مساوی باشند ، دومثلث متساویند .

۱۶ ـ هرگاه وتر ویك ضلع از مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر و یك ضلع از مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگرمساوی باشند ، دومثلث متساویند .

۱۷ ـ مکان هندسی نقاطی که از دونقطهٔ A و B به یك فاصله باشند ، عمودمنصف قطعه‌خط AB است .

۱۸ـ مکان هندسی نقاطی‌که از دو ضلع یك زاویه به یك فاصله باشند، نیمسازآن زاویه است .

تمرین

۱ ـ ثابت‌کنیدکه اگر از نقطهٔ M واقع درداخل مثلث متساوی‌الساقین ABC به‌رأس A وصل‌کنیم وMA زاویهٔ A را نصف‌کند، مثلث MBC هم متساوی‌الساقین است .

۲ ـ اگر دو ارتفاع مثلثی متساوی باشند، مثلث متساوی‌الساقین است و اگر سه ارتفاع متساوی باشند ، مثلث متساوی‌الاضلاع است، چرا ؟

۳ ـ هرگاه درمثلث قائم‌الزاویه یك زاویهٔ حاده نصف زاویهٔ حادهٔ دیگر باشد ، ضلع مقابل به زاویهٔ‌کوچکتر نصف وتر است و بعکس .

۴ ـ از هرنقطهٔ ارتفاع مرسوم از رأس مثلث متساوی‌الساقین که به دو رأس مجاور قاعده وصل‌کنیم ، مثلث متساوی‌الساقین بوجود می‌آید .

۵ ـ هرگاه دو مثلث متساوی‌الساقین در قاعده مشترك باشند ، خطی که دو رأس‌آنها را به هم ربط دهد، برقاعدهٔ مشترکشان عمود است وآن را نصف می‌کند .

۶ ـ اگر دوضلع وزاویهٔ مقابل به ضلع بزرگتر از مثلثی با همین اجزا ازمثلث دیگر برابر باشند، دومثلث متساویند.

۷ ـ هرگاه یك ضلع و یك ارتفاع مثلث متساوی‌الساقینی با یك ضلع و یك ارتفاع نظیر از مثلث متساوی‌الساقین دیگر متساوی باشند ، دو مثلث متساویند .

۸ ـ اگر دو مثلث متساوی‌الاضلاع یك ارتفاع متساوی داشته باشند ، دومثلث متساویند .

۹ ـ هردو رأس مثلث، ازمیانهٔ نظیر رأس سوم‌آن به یك فاصله‌اند.

۱۰ ـ اگر در مثلث ABC از B عمودی برنیمساز زاویهٔ A فرود آوریم تاآن را در M وضلع AC را درB' قطع‌کند ، $MB=MB'$.

مثلثی با معلومات زیر بسازید :

۱۱ - سانتیمتر ۶ = c ، سانتیمتر ۷ = b ، سانتیمتر ۵ = a

۱۲ - $\hat{B}$ = ۴۵° ، سانتیمتر ۴ = c ، سانتیمتر ۴ = a

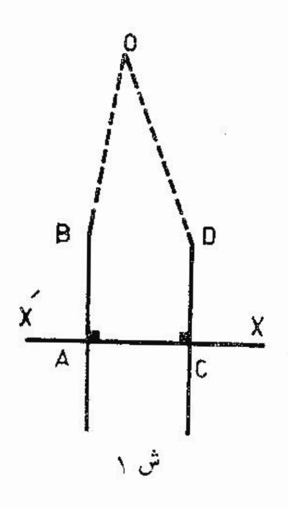
۱۳ - $\hat{A}$ = ۶۹° ، سانتیمتر ۴ = b ، سانتیمتر ۶ = c

۱۴ - $\hat{C}$ = ۶۰° ، $\hat{A}$ = ۴۵° ، سانتیمتر ۶ = b

فصل ششم

خطوط متوازی

۱ ـ قضیه ـ اگر دوخط AB و CD برخط x'x عمود باشند، یکدیگر را قطع نمی‌کنند .

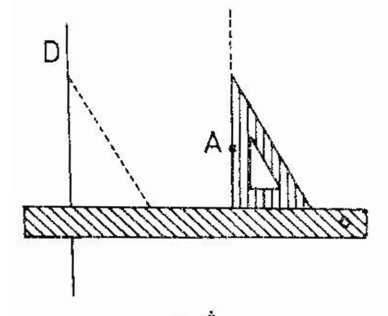


ش ۱

برهان ـ اگر AB ∥ CD نباشد ، بناچار آن را در نقطه‌ای مانند O قطع می‌کند ، در این صورت باید از O دوعمود بر x'x رسم شده باشد و این غیر ممکن است (شکل ۱) .

۲ ـ رسم خطوط متوازی

عملاً خطوط متوازی به‌کمك گونیا و خط کش رسم می‌شوند . برای آنکه از یك نقطه مانند A (شکل ۲) خطی موازی باخط D رسم‌کنیم ، یك ضلع گونیا را در کنار خط D قرار می‌دهیم و خط‌کش را به ضلع دیگر گونیا متکی می‌کنیم و گونیا را در طول



ش ۲

خط‌کش که ثابت نگاه داشته می‌شود می‌لغزانیم تا ضلعی که درامتداد خط D بود، برA بگذرد؛خطی که از A درامتداد ضلع‌گونیا رسم شود، با D

موازی است؛ زیراکه هردو برامتداد لبهٔ خطکش عمود هستند .

۳ ـ اصل موضوع اقلیدس ـ از یك نقطهٔ واقع در خارج خطی ، یك خط می‌توان به موازات آن خط رسم‌کرد و بیش از یك خط ممکن نیست.

این اصل مهم ، که صحتش از راه آزمایش محرز شده است ، به اصل اقلیدس معروف است و مبنای هندسهٔ اقلیدسی است .

۴ ـ از اصل اقلیدس نتایجی می‌توان‌گرفت ، به این شرح :

الف ـ چند خط موازی با یك خط ، با یکدیگر موازیند .

در حقیقت اگر دو خط d' و d'' (شکل ۳) با d موازی باشند ، نمی‌توانند یکدیگر را قطع کنند زیرا که در این صورت باید از نقطهٔ تقاطع آنها دوخط موازی با d رسم شده باشد و این، خلاف اصل اقلیدس است .

ش ۳

ب ـ اگر خطی یکی‌از دو خط متوازی را قطع‌کند، دیگری را هم قطع می‌کند .

در حقیقت اگر $a \parallel c$ باشد (شکل ۴) ، خط b که خط a را در E قطع می‌کند نمی‌تواند با خط c موازی باشد ، زیرا که در این صورت لازم می‌آید از E دو خط موازی c رسم شده باشد .

ش ۴

ج ـ اگر خطی بر یکی از دو خط متوازی عمود باشد ، بر دیگری هم عمود است .

اگر $AB \parallel CD$ وخط d بر AB عمود باشد(شکل ۵) ، خط d بر CD هم عمود خواهد بود ؛ زیرا که در غیر این صورت از F ، نقطهٔ برخورد خط d و CD ، خط FG را برخط d عمود می‌کنیم ؛ چون دوخط عمود بر یك خط با هم موازی می‌شوند ، لازم می‌آید که FG با AB موازی و در نتیجه بر CD منطبق باشد ؛ یعنی خط d بر CD عمود است .

ش ۵

زوایای حادث از تقاطع سه خط

۵ ـ مورب ـ خطی‌که چند خط دیگررا قطع‌کند ، نسبت به‌آنها **مورب** نامیده می‌شود .

۶ـ زوایای متبادل ومتقابل ـ هرگاه خطی مانند D دو خط مانند E و F (شکل ۶) را قطع کند، از برخورد آنها هشت زاویه بوجود می‌آیندکه با مقایسهٔ وضع قرارگرفتن آنها بایکدیگر نامهای مخصوص دارند .

ش ۶

۱) هردو زاویه را که رأس مشترك نداشته و یك طرف مورب D باشند ، **متقابل** می‌نامند .

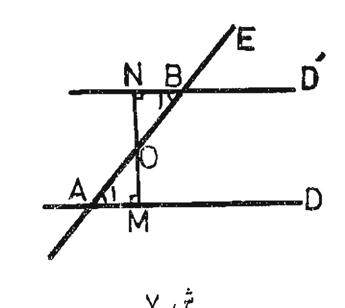
۲) هر دو زاویه را که رأس مشترك نداشته و در دو طرف مورب باشند ، **متبادل** می‌گویند .

۳) هرزاویه‌که بین دوخط E و F باشد ، زاویهٔ **درونی** نام دارد .

۴) هر زاویه‌که خارج E و F باشد ، **بیرونی** نامیده می‌شود .

پس درشکل ۶، $\hat{۴}$ و $\hat{۵}$ متقابل درونی ، $\hat{۴}$ و $\hat{۶}$ متبادل درونی ، $\hat{۴}$ و $\hat{۸}$ متقابل درونی وبیرونی ، $\hat{۴}$ و $\hat{۷}$ متبادل درونی و بیرونی ، $\hat{۲}$ و $\hat{۷}$ متقابل بیرونی و $\hat{۲}$ و $\hat{۸}$ متبادل بیرونی هستند .

۷ ـ قضیه ـ دو زاویهٔ متبادل درونی که از مورب دو خط متوازی بوجود می‌آیند ، متساویند .



ش ۷

فرض: $D \parallel D'$ و مورّب E دوخط D و D' را در A و B قطع کرده است . (شکل ۷) .

حکم : $\hat{A}_1=\hat{B}_1$

برهان ـ از O وسط AB ، خطی برD عمود می‌کنیم تا آن را در M قطع کند .

OM بر D' هم عمود است وآن را در N قطع می‌کند . دو مثلث قائم الزاویهٔ OMA و ONB متساویند (به حالت تساوی وتر ویك زاویهٔ حاده) ، پس : $\hat{A}_1=\hat{B}_1$.

۸ـ نتیجه ـ وقتی که موربی دو خط متوازی را قطع کند ، بین

زاویه‌هایی‌که تشکیل می‌شوند این روابط برقرار است :

۱) هردو زاویهٔ متقابل درونی وبیرونی متساویند .

۲) هردو زاویهٔ متبادل بیرونی متساویند .

۳) هردو زاویهٔ متقابل درونی مکملند .

۴) هردو زاویهٔ متبادل درونی وبیرونی مکملند .

اثبات صحت این نتایج برعهدهٔ دانش‌آموزان است .

۹ـ قضیهٔ عکس ـ هرگاه موربی دو خط را قطع کند و دو زاویهٔ متبادل درونی متساوی باشند ، دو خط متوازیند .

ش ۸

فرض: $\widehat{ABC}=\widehat{BCD}$ (شکل ۸).

حکم : $AB \parallel CD$

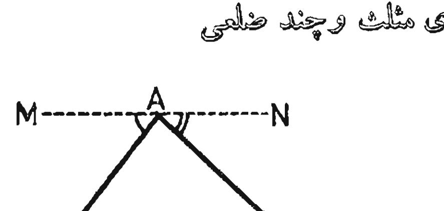
برهان ـ اگرCDموازیAB نباشد، از نقطهٔ C خط CD' را موازی AB می‌کشیم .

بنابر قضیهٔ پیش $\widehat{ABC}=\widehat{BCD'}$. با توجه به فرض که $\widehat{BCD}$ با $\widehat{ABC}$ مساوی است ، لازم می‌آید که $\widehat{BCD'}=\widehat{BCD}$ باشد ، یعنی CD بر CD' منطبق و درنتیجه با AB موازی‌است .

مجموع زوایای مثلث وچند ضلعی

۱۰ـ قضیه ـ مجموع سه زاویهٔ داخلی‌مثلث ، مساوی ۲ قائمه است .

برهان ـ درمثلثABC (شکل ۹) از رأس A خط



ش ۹

MN را موازی BC رسم می‌کنیم .

در دومتوازی MN ، BC و مورب AC داریم :

$\widehat{NAC}=\widehat{ACB}$ و در همان دو متوازی و مورب AB خواهیم داشت :

$$\widehat{MAB}=\widehat{ABC}$$

پس : $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\widehat{BAC}+\widehat{MAB}+\widehat{NAC}=۱۸۰^\circ$

۱۱ - نتیجه - هرزاویهٔ خارجی مثلث ، مساوی است با مجموع دو زاویهٔ داخلی‌که مجاور آن نباشند .

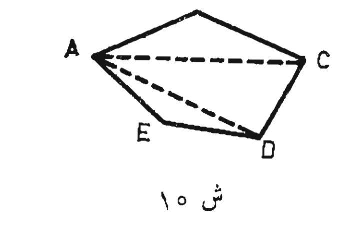
زیرا $\hat{C}+\widehat{ACX}=۱۸۰^\circ$ یا $\widehat{ACX}=۱۸۰^\circ-\hat{C}$

از طرف دیگر $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$ یا $\hat{A}+\hat{B}=۱۸۰^\circ-\hat{C}$

بنابراین : $\widehat{ACX}=\hat{A}+\hat{B}$

۱۲ - قضیه - مجموع زوایای n ضلعی محدب ، (۲n − ۴) قائمه است .

برهان - از یك رأس مانند A (شکل ۱۰) ، قطرها را رسم می‌کنیم ؛ به این ترتیب، چند ضلعی، به یك عده مثلث تجزیه می‌شود و می‌توان تعیین مجموع زوایای n ضلعی را به تعیین مجموع زوایای این مثلثها راجع کرد .



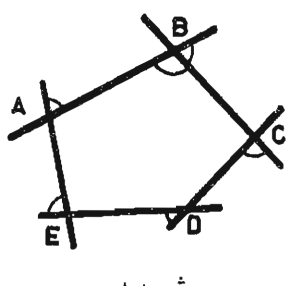
ش ۱۰

اگر A را رأس مشترك این مثلثها بگیریم ، قاعده‌های آنها اضلاع BC و CD و DE ، یعنی همهٔ اضلاع چند‌ضلعی غیر ازدوضلعی‌که بر A می‌گذرند، خواهندبود. پس تعداد مثلثهای نامبرده ازتعداد اضلاع چندضلعی ۲ تا کمتر است، یعنی تعداد مثلثها (n − ۲)

است ومجموع‌زاویه‌های‌آنها (n − ۲)۲قائمه‌یعنی(۲n − ۴)قائمه است.

۱۳- مجموع زاویه‌های خارجی هر چند ضلعی مساوی با ۴ قائمه است .

در حقیقت اگر هرضلع چند ضلعی را از یك طرف امتداد دهیم ، یك زاویهٔ‌خارجی‌آن تشکیل می‌شودکه با زاویهٔ داخلی مجاورش مساوی ۲ قائمه است ؛ واگرتعداد اضلاع شکل را n فرض‌کنیم ، مجموع زوایای داخلی و خارجی n ضلعی ، ۲n قائمه خواهد شد (شکل ۱۱) ؛ چون از این مقدار ، مجموع زوایای داخلی [یعنی (۲n − ۴) قائمه] را کسرکنیم ، مجموع زوایای خارجی چند ضلعی پیدا می‌شود :



ش ۱۱

مجموع زوایای خارجی = ۲n قائمه − (۲n − ۴) قائمه = ۴قائمه .

زوایایی که اضلاعشان متوازی یا متعامد باشند

۱۴- قضیه - دوزاویهٔ‌محدبی‌که اضلاعشان دوبدو باهم موازی‌باشند، یا باهم برابرند یا مکمل یکدیگرند .

فرض : $OA \parallel O'F$ و $OB \parallel O'D$ (شکل ۱۲) .

حکم:
(۱) $\hat{۱}=\hat{۲}$
(۲) $\hat{۱}+\hat{۳}=۱۸۰^\circ$

ش ۱۲

برهان - ۱) OB را امتداد می‌دهیم

تا امتداد O'F را قطع کند . نسبت به دو متوازی OA و O'F وموربِ OB :

$$\hat{1}=\hat{5}$$

ونسبت به دو متوازی OB وO'D وموربO'F :

$$\hat{2}=\hat{5}$$

ازمقایسهٔ دورابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود که :

$$\boxed{\hat{1}=\hat{2}}$$

برهان - ۲) می‌دانیم که :

$$\hat{3}+\hat{2}=180^\circ$$

به‌جای $\hat{2}$ مساویش $\hat{1}$ را قرار می‌دهیم :

$$\hat{3}+\hat{1}=180^\circ$$

یك نکته - با دقت درشکل می‌بینیدکه اضلاع دوزاویهٔ ۱ و۲ در یك جهت و اضلاع زاویهٔ ۱ و زاویهٔ متقابل‌به رأس $\hat{2}$ در جهت مخالف کشیده شده‌اند . در زاویه‌های ۱ و ۳ دو ضلع OA وO'F در یك جهت هستند ودوضلع OB وO'E در جهت مخالف . پس می‌توان گفت که دو زاویه‌که اضلاعشان متوازی ودر یك جهت یا متوازی ودر جهت مخالف باشند ، متساویند ؛ ودو زاویه که یکی از دو ضلعشان متوازی ودر یك جهت ودوضلع دیگرشان متوازی ودر جهت مخالف باشند ، مکملند .

۱۵- قضیه - دوزاویهٔ محدبی‌که اضلاعشان دوبدو برهم عمود باشند، برابر یا مکمل یکدیگرند .

فرض : $ON \perp O'A$ و $OM \perp O'C$ (شکل ۱۳) .

حکم:

$$\widehat{NOM}=\widehat{AO'C} \quad (1$$

$$\widehat{NOM}+\widehat{AO'D}=180^\circ \quad (2$$

ش ۱۳

برهان ۱) OA' وOC' را بترتیب موازی با O'A و O'C می‌کشیم .

زاویه‌های A'ON و C'OM هردوقائمه‌اند .

پس $\widehat{MON}$ و $\widehat{A'OC'}$ که یك متمم دارند ، متساوی می‌شوند .

داریم : $\widehat{A'OC'}=\widehat{AO'C}$ زیراضلعهایشان‌متوازی‌ومتحدالجهت است . بنابراین : $\widehat{MON}=\widehat{AO'C}$

برهان ۲) می‌دانیم‌که : $\widehat{AO'D}+\widehat{AO'C}=180^\circ$

چون به‌جای $\widehat{AO'C}$ مساویش $\widehat{MON}$ را قراردهیم :

$$\widehat{AO'D}+\widehat{MON}=180^\circ$$

خلاصهٔ مطالب مهم :

۱- ازیك نقطهٔ‌خارج یك‌خط ، فقط یك‌خط می‌توان موازی‌آن‌خط رسم کرد (اصل اقلیدس) .

۲- دوخط عمود بر یك خط ، متوازیند .

۳- دوخط موازی‌باخط ثالث ، متوازیند .

۴- اگر خطی یکی از دو متوازی را قطع کند ، دیگری را هم قطع می‌کند .

۵- اگر خطی بر یکی از دوخط متوازی عمود باشد ، بر دیگری نیز عمود است .

۶ - هرگاه خطی دو خط را قطع کند ، هشت زاویه ایجاد می‌شود : I) هردو زاویه راکه رأس مشترك نداشته ودر یك طرف مورب باشند، متقابل می‌نامند ؛ II) هر دو زاویه را که رأس مشترك نداشته و در دو طرف مورب باشند ، متبادل گویند ؛ III) هر زاویه‌که بین دوخط باشد درونی وهرزاویه که خارج دوخط باشد بیرونی است .

۷ - هرگاه خطی دو خط متوازی را قطع کند : I) دو زاویهٔ متقابل درونی و بیرونی متساویند ؛ II) دو زاویهٔ متبادل درونی متساویند ؛ III) دو زاویهٔ متقابل بیرونی مکملند ؛ IV) دو زاویهٔ متبادل درونی و بیرونی مکملند .

۸- هرگاه موربی دوخط را قطع‌کند و دو زاویهٔ متبادل درونی متساوی

باشند ، دو خط متوازیند .

۹ - مجموع زوایای داخلی هر مثلث، دو قائمه است .

۱۰ - مجموع زوایای یك nضلعی محدب $(2n-4)$ قائمه است .

۱۱ - مجموع زوایای خارجی هرچندضلعی محدب، چهار قائمه است.

۱۲ - دو زاویه‌که اضلاعشان دوبدو متوازی یا بر هم عمود باشند، باهم برابر یا مکملند . اگر هردو حاده یا هردو منفرجه باشند ، متساویند و اگر یکی‌حاده و دیگری منفرجه باشد ، مکملند .

تمرین

۱ - موربی دو خط متوازی را در A و B قطع می‌کند . ثابت کنیدکه نیمسازهای دو زاویهٔ متبادل (هردو درونی یا هردو بیرونی) A و B بایکدیگر موازیند .

۲ - ثابت کنید که در خطهای تمرین بالا نیمسازهای دو زاویهٔ متقابل داخلی برهم عمودند .

۳ - نیمسازهای زاویه های متقابل هر متوازی‌الاضلاع متوازیند .

۴- دو خط d و d' را خط سومی قطع می‌کند و نیمسازهای زاویه های متبادل داخل و خارج که به این ترتیب تشکیل می‌شوند بر یکدیگر عمودند؛ ثابت کنید که d و d' متوازیند .

۵ - میانهٔ وارد بر هر ضلع مثلث با ارتفاع و عمود منصف همان ضلع زوایای متساوی تشکیل می‌دهد .

۶ - نیمساز زاویهٔ خارجی رأس مثلث متساوی‌الساقین با قاعده موازی است و بعکس .

۷ - اگر ازنقطهٔ تقاطع نیمساز یکی از زاویه‌های مثلث با ضلع مقابل، دو پاره‌خط به موازات دو ضلع دیگر رسم کنیم تا به آنها محدود شوند، این دو پاره‌خط با هم مساوی هستند .

۸- در هرمثلث، زاویهٔ بین ارتفاع ونیمساز زاویهٔ هررأس، نصف تفاضل دو زاویهٔ دیگر مثلث است .

۹ - درمثلث ABC زاویهٔ منفرجهٔ بین‌نیمسازهای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ مساوی است با $90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$.

۱۰- زاویهٔ بین میانه و ارتفاع وارد بر وترمثلث قائم‌الزاویه، مساوی است با تفاضل دو زاویهٔ حادهٔ مثلث .

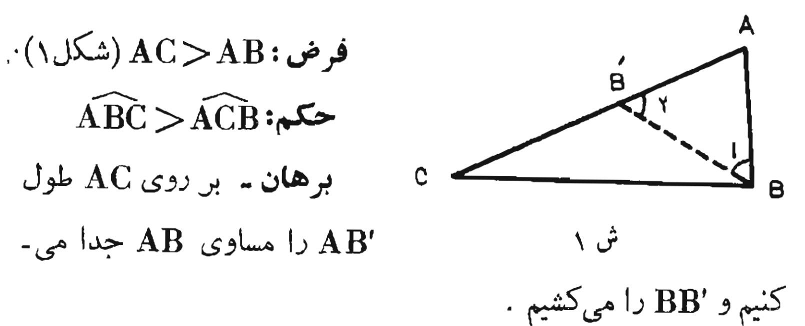
۱۱ - در مثلث قائم‌الزاویه ، نیمساز زاویهٔ قائمه ، نیمساز زاویهٔ بین میانه وارتفاع وارد بروتر نیز هست .

۱۲ - در مثلث ABC دو خط AD و AE را چنان رسم کنید که بترتیب با AB و AC زاویه های مساوی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ بسازند و ضلع مقابل را در D و E قطع کنند؛ ثابت کنید که $AD = AE$.

فصل هفتم

نا مساویها در مثلث

۱ ـ اگر در مثلثی دو ضلع نا متساوی باشند ، زاویهٔ روبروی ضلع بزرگتر، بزرگتراست از زاویهٔ روبروی ضلع کوچکتر .



ش ۱

فرض : $AC > AB$ (شکل۱).

حکم: $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$

برهان ـ بر روی AC طول AB′ را مساوی AB جدا می‌کنیم و BB′ را می‌کشیم .

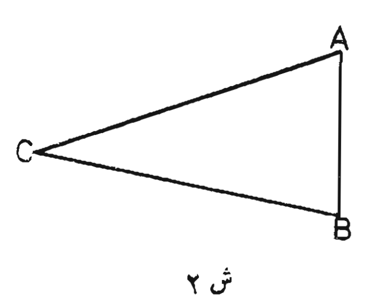
بدیهی است که : $\hat{2} = \hat{1}$ (۱)

و $\widehat{ABC} > \widehat{ABB'}$ (۲)

بنا براین : $\widehat{ABC} > \hat{2}$ (۳)

اما $\hat{2}$ زاویهٔ خارجی مثلث B′BC است و از $\widehat{B'CB}$ بزرگتر است . اگر در طرف دوم نامساوی (۳) به‌جای $\hat{2}$ مقدار کوچکتری ، یعنی $\widehat{B'CB}$ ، را قرار دهیم جهت نامساوی تغییر نمی‌کند ، یعنی باز طرف اول بزرگتر از طرف دوم است ، بنا براین : $\widehat{ABC} > \widehat{B'CB}$ ، یعنی $\hat{B} > \hat{C}$.

۲ـ قضیهٔ عکس ـ اگر در مثلثی دو زاویه نامتساوی باشند ، ضلع روبروی زاویهٔ بزرگتر ، بزرگتر است از ضلع روبروی زاویهٔ کوچکتر .



ش ۲

فرض : $\hat{B} > \hat{C}$ (شکل ۲)

حکم : $AC > AB$

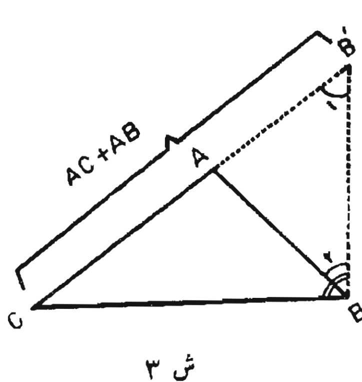
برهان ـ اگر AC از AB بزرگتر نباشد ، یا :

۱) $AC = AB$ ، در این صورت مثلث متساوی‌الساقین می‌شود و $\hat{C} = \hat{B}$ ، در صورتی که چنین نیست .

۲) $AC < AB$ ، در این صورت زاویهٔ مقابل به AC ، یعنی $\hat{B}$ ، کوچکتراز زاویهٔ مقابل به AB ، یعنی $\hat{C}$ می‌شود ، در صورتی‌که چنین هم نیست ؛ پس بناچار :

$$AC > AB$$

۳ ـ قضیه ـ در هر مثلث ، هر ضلع کوچکتر است ازمجموع دوضلع دیگر .



ش ۳

این قضیه برای هرضلع مثلث‌که از یکی از دوضلع دیگرکوچکتر باشد، محرز است ومحتاج به‌اثبات‌نیست؛ پس بایدآن را در مورد بزرگترین ضلع ثابت‌کرد .

اگر BC بزرگترین ضلع مثلث ABC باشد (شکل ۳)، یکی از دوضلع دیگر، مثلاً AC، را به اندازهٔ ضلع سوم، یعنی AB، امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ B' بدست آید.

درمثلث متساوی‌الساقین ABB' : $\hat{۲}=\hat{۱}$

پس در مثلث $BB'C$ زاویهٔ $CB'B$ کوچکتر از زاویهٔ CBB' است ودرنتیجه: $BC<B'C$

یا: $BC<B'A+AC$

یعنی: $BC<AB+AC$

۴- نتیجه - اگردر نامساوی $BC<AB+AC$ یکی از دو ضلع طرف دوم را به طرف اول ببریم:

$$BC-AB<AC$$

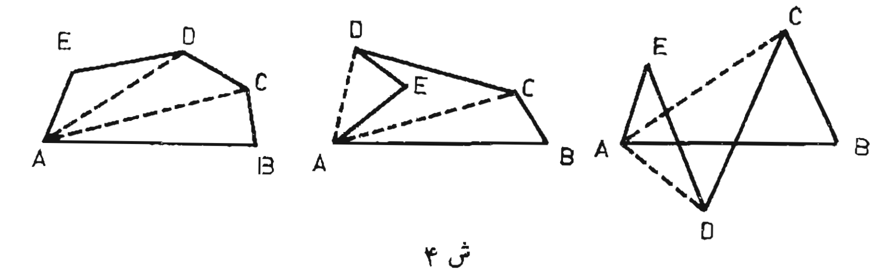
یعنی، **درهرمثلث، هرضلع بزرگتراست ازتفاضل دوضلع دیگر.**

۵- قضیه - هر قطعه خط، کوچکتر است از مجموع اضلاع هرخط شکستهٔ محدب* یامقعری‌که به‌دو انتهای‌آن قطعه‌خط منتهی شود.

برهان - قطعه‌خط AB وخط شکستهٔ AEDCB مفروض است (شکل۴). از A به D و C وصل می‌کنیم؛ در مثلثهای AED و ADC و ABC بترتیب این روابط را داریم:

$$AD<AE+ED$$
$$AC<AD+DC$$
$$AB<AC+BC$$

* خط شکسته را محدب گویند اگر هرضلع آن را امتداد دهیم تمام خط شکسته در یك طرف آن قرار گیرد.



ش ۴

حال اگر طرف اول نامساویهای اخیر را با هم و طرف دوم آنها را نیز با هم جمع کنیم و مقادیر متساوی را از طرفین حذف کنیم، خواهیم داشت:

$$AB<AE+ED+DC+CB$$

۶ - تعریف - هرگاه شکلی در درون شکل دیگر قرار داشته باشد، شکل دومی‌را محیط بر اولی و اولی را محاط در دومی گویند.

۷ - قضیه - هرخط شکستهٔ محدب، کوچکتر است از هرخط شکستهٔ دیگری که برآن محیط باشد وبه دو انتهای‌آن منتهی شود.

برهان - خطهای شکستهٔ ABCDE و EFGHIA مفروضند (شکل۵). AB، BC و CD را امتداد می‌دهیم تا اضلاع خط شکستهٔ دیگر را در نقاط M و L و N قطع کنند:

ش ۵

$$AM=AB+BM<AI+IM$$
$$BL=BC+CL<BM+MH+HL$$
$$CN=CD+DN<CL+LG+GF+FN$$
$$DE<DN+NE$$

اگر طرف چپ نامساویهای اخیر را با هم و طرف راست آنها را نیز با هم جمع کنیم، پس از حذف مقادیر متساوی دوطرف ، نامساوی زیر نتیجه می‌شود :

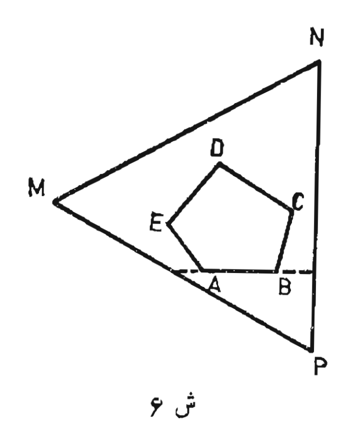
$$AB+BC+CD+DE < AI+IM+MH+HL+LG+GF+FN+NE$$

به جای $IM+MH$ مساویش IH و به جای $HL+LG$ مساویش HG و به جای $FN+NE$ مقدارش FE را قرار می‌دهیم ، خواهیم داشت :

$$AB+BC+CD+DE < AI+IH+HG+GF+FE$$

۸ ـ نتیجه ـ محیط هر چندضلعی محدب، کوچکتر است ازمحیط هر چندضلعی دیگر که برآن محیط باشد .

استدلال برعهدهٔ دانش‌آموزان است (شکل۶) .



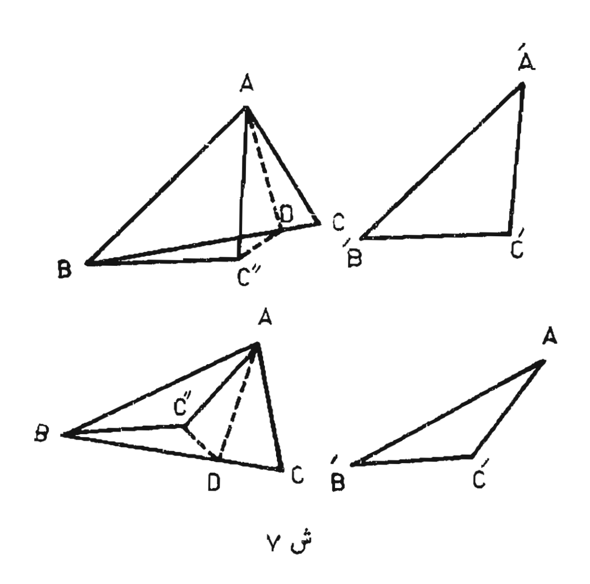
ش ۶

۹ ـ قضیه ـ هرگاه دوضلع مثلثی بادوضلع مثلث دیگرمساوی باشند اما زاویه‌های بین آنها در دو مثلث با هم برابر نباشند ، ضلع روبروی زاویهٔ بزرگتر ، بزرگتر است از ضلع روبروی زاویهٔ کوچکتر.

فرض : (شکل۷)
$$\begin{cases} AB=A'B' \\ AC=A'C' \\ \widehat{BAC} > \widehat{B'A'C'} \end{cases}$$

حکم : $BC > B'C'$

برهان ـ مثلث $A'B'C'$ را روی مثلث ABC چنان قرار می‌دهیم که $A'B'$ برمساویش AB منطبق شود و $A'C'$ داخل زاویهٔ BAC به وضع AC'' قرار گیرد . نیمساز $\widehat{C''AC}$ را رسم می‌کنیم تا CB را در D قطع کند و از D به C'' وصل می‌کنیم. دومثلث ADC'' و ADC به حالت ض‌زض متساوی می‌شوند و $DC''=DC$. اما درمثلث BDC'' چنین داریم : $BC''<BD+DC''$ به جای DC'' مساویش DC و به جای BC'' مساویش $B'C'$ را قرار می‌دهیم تا چنین حاصل شود :



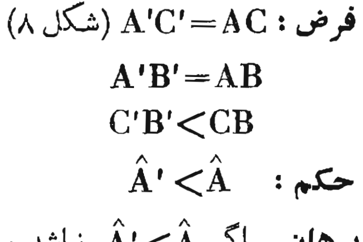
ش ۷

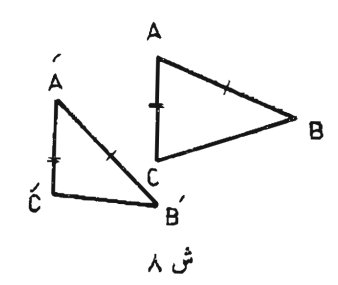
$$B'C' < BD+DC$$

یا

$$B'C' < BC$$

۱۰ ـ قضیهٔ عکس ـ اگر دو ضلع مثلثی با دو ضلع مثلث دیگر مساوی باشند ولی ضلعهای سوم آنها با هم برابر نباشند ، ضلع کوچکتر مقابل است به زاویهٔ کوچکتر.





ش ۸

فرض : $A'C'=AC$ (شکل ۸)

$A'B'=AB$

$C'B'<CB$

حکم : $\hat{A}'<\hat{A}$

برهان - اگر $\hat{A}'<\hat{A}$ نباشد ، باید یا $\hat{A}'=\hat{A}$ باشد ودراین صورت دو مثلث به حالت ض ز ض متساوی می‌شوند و $C'B'=CB$، در صورتی‌که چنین نیست؛ یا $\hat{A}'>\hat{A}$ باشد، و در این صورت $C'B'>CB$ در صورتی که چنین هم نیست ؛ پس بناچار : $\hat{A}'<\hat{A}$

عمود و مایل

۱۱ - تعریف - دو خط را نسبت به هم **مایل** گوییم اگر بر هم **عمود** یا با هم **موازی** نباشند .

اگر PO عمود وارد از نقطهٔ P بر خط xy باشد (شکل ۹) ، واضح است که هر خط دیگر مانند PB نسبت به xy مایل است . O را پای عمود و B را پای مایل می‌گویند . فاصلهٔ OB را **بعد مایل** و PB را **طول مایل** می‌نامند .

۱۲ - قضیه - هرگاه از نقطهٔ P واقع در خارج xy چند مایل و عمود PO را به خط xy رسم کنیم :

الف) عمود کوتاهتر از هرمایل است .

ب) دو مایل متساوی‌البعد، متساوی‌الطولند و بعکس.

ج) از دو مایل مختلف‌البعد، آن‌که بعدش بیشتر است، طولش بیشتر است و بعکس .

الف - فرض : $PO \perp xy$ و PB نسبت به xy مایل است (شکل ۹) .

حکم : $PO<PB$

برهان - چون در مثلث POB زاویهٔ حادهٔ B از زاویهٔ قائمهٔ O کوچکتر است، ضلع‌مقابلش PO از PB کوچکتر می‌باشد .

ش ۹

ب) فرض : $PO \perp xy$ و $OA=OB$ (شکل ۱۰) .

حکم : $PA=PB$

برهان - چون PO عمود منصف قطعه‌خط AB است :

$$PA=PB$$

بعکس- فرض : $PO \perp xy$ و $PA=PB$

حکم : $OA=OB$

ش ۱۰

برهان - چون $PA=PB$ ، مثلث PAB متساوی‌الساقین است ودر مثلث متساوی‌الساقین ، ارتفاع PO میانه هم هست ، یعنی :

$$OA=OB$$

ش ۱۱

ج) فرض : $OA>OB$ (شکل ۱۱) .

حکم : $PA>PB$

برهان - $\widehat{PBA}$ ، زاویهٔ خارجی مثلث قائم‌الزاویهٔ PBO ، منفرجه است یعنی بزرگتر از زاویهٔ حادهٔ A است ، بنابراین در مثلث

. $PA > PB$: PAB

توجه‌کنید! اگر OA و OC در دوطرف عمود باشند، OB را مساوی OC جدا می‌کنیم و به همین ترتیب قضیه را ثابت می‌کنیم.

بعکس، فرض : $PA>PC$

حکم : $OA>OC$

برهان - اگر OA بزرگتر از OC نباشد، یا با آن مساوی‌است یا از آن کوچکتر است. اگر OA مساوی با OC باشد، $PA=PC$، که خلاف فرض است؛ واگر $OA<OC$ باشد، $PA<PC$، که این نیزخلاف فرض است؛ پس $OA>OC$.

۱۳ - قضیه - هرگاه PO کوتاهترین راه بین نقطهٔ P و خط xy باشد، PO بر xy عمود است (شکل۱۲).

برهان - اگر PO بر xy عمود نباشد، خطی دیگر مانند PB بر xy عمود می‌شود و در آن صورت $PB<PO$، و این خلاف فرض است، پس PO بر xy عمود است.

ش ۱۲

خلاصهٔ مطالب مهم :

۱ - در هرمثلث، ضلع بزرگتر مقابل است به زاویهٔ بزرگتر.

۲ - در هرمثلث، زاویهٔ بزرگتر مقابل است به ضلع بزرگتر.

۳ - در هر مثلث، هر ضلع کوچکتر است از مجموع دوضلع دیگر و بزرگتر است ازتفاضل آنها.

۴ - هر پاره‌خط، کوچکتر است از مجموع اضلاع هر خط شکسته که به دو انتهای آن منتهی شود.

۵ - هرخط شکستهٔ محدب، کوتاهتر است از هرخط شکستهٔ دیگری‌که برآن محیط باشد وبه دو انتهای آن منتهی شود.

۶ - هرگاه دوضلع مثلثی با دو ضلع مثلث دیگر مساوی باشند وزاویه‌های بین‌آنها در دو مثلث با هم برابر نباشند، ضلع روبروی زاویهٔ بزرگتر، بزرگتر است از ضلع روبروی زاویهٔ کوچکتر.

۷ - اگر دوضلع مثلثی بادوضلع مثلث دیگر مساوی باشند ولی ضلعهای سومشان با هم برابر نباشند، ضلع بزرگتر مقابل است به زاویهٔ بزرگتر.

۸ - دو خط را نسبت به هم مایل گوییم اگر برهم عمود نباشند.

۹ - هرگاه ازنقطهٔ واقع درخارج خطی عمود و چند مایل نسبت به‌آن خط رسم کنیم:

اولا - عمود کوتاهتر است ازهرمایل.

ثانیاً - از دومایل مختلف‌البعد، آن‌که بعدش بیشتر است، طولش بیشتر است و بعکس.

۱۰ - طول عمود مرسوم از یك نقطه بر یك خط کوتاهترین راه بین آن نقطه و خط است.

تمرین :

۱- نیمساز زاویهٔ A ازمثلث ABC ضلع مقابل را درD قطع می‌کند. ثابت کنید که: $BA>BD$ و $CA>CD$

۲ - برحسب‌آنکه زاویهٔ A ازمثلثی، منفرجه یا قائمه یا حاده باشد، میانهٔ وارد برضلع a : از $\frac{a}{2}$ کوچکتر، با $\frac{a}{2}$ مساوی، از $\frac{a}{2}$ بزرگتراست.

راهنمایی - میانه را بهاندازهٔ خود امتداد بدهید.

۳ - هرگاه در مثلث ABC، $AB>AC$ باشد و روی اضلاع AB و AC طولهای BP و CQ را مساوی هم جداکنیم، ثابت کنید $BQ>CP$ است. اگر BP و CQ را روی امتداد AB و AC جدا کنیم، مسئله چه تغییری می‌کند؟

۴ - اگرO نقطه‌ای در درون مثلث ABC باشد، ثابت کنید که:

$$OA+OB<CA+CB$$

۵ - ثابت‌کنیدکه مجموع فاصله‌های هرنقطهٔ واقع در درون مثلث ازسه رأس‌آن، کوچکتر است از محیط مثلث و بزرگتر است از نصف محیط‌آن.

۶ - اگر AM میانهٔ مثلث ABC باشد، ثابت‌کنیدکه:

$$AM < \frac{۱}{۲}(AB+AC)$$

۷ ـ هرگاه از O واقع در درون مثلث به B و C کشیده شود ، ثابت کنید که :

$$\widehat{BAC} < \widehat{BOC}$$

۸ ـ در مثلث ABC اگر $AB > AC$ و AM میانه باشد ، ثابت کنید که :

$$\widehat{MAC} > \widehat{MAB}$$

۹ـ در مثلث ABC اگر $AB < AC$ و AH ارتفاع باشد، ثابت کنید که :

$$\widehat{HAC} > \widehat{HAB}$$

۱۰ ـ ثابت کنید که در هر مثلث، نیمساز هر زاویه، داخل زاویهٔ بین ارتفاع و میانهٔ نظیر رأس آن زاویه است .

۱۱ ـ در هرمثلث نیمساز هر زاویه‌کوتاهتر است ازمیانهٔ وارد برضلع مقابل‌آن زاویه .

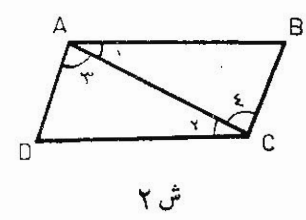
۱۲ ـ هرگاه از یك نقطهٔ واقع در درون یك چهارضلعی به چهاررأس آن وصل کنیم ، مجموع چهار پاره‌خطی که تشکیل می‌شوند بزرگتر است از مجموع دوقطر.

۱۳ ـ درهرمثلث مجموع سه ارتفاع‌کوچکتراست ازمجموع سه ضلع.

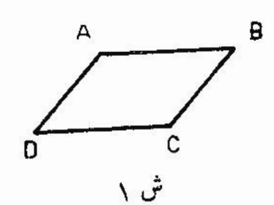
فصل هشتم

چهارضلعیهای مهم

۱ ـ متوازی‌الاضلاع ـ متوازی‌الاضلاع ، چهار ضلعیی است که اضلاع آن دو بدو با هم موازی باشند (شکل ۱) . در متوازی‌الاضلاع ، هر دو ضلع متوازی را **دو ضلع روبرو** می‌نامند . دو زاویه را که در یك ضلع شریك باشند ، **زوایای مجاور** و دو زاویه را که ضلع مشترك ندارند **زاویه‌های متقابل** می‌گویند .



ش ۲



ش ۱

۲ ـ قضیه ـ در متوازی‌الاضلاع ، هردو ضلع روبرو باهم برابرند.

برهان ـ قطر AC را وصل می‌کنیم (شکل۲)؛ دو مثلث ABC و ADC به حالت (ز ض ز) متساویند .

۳ ـ نتیجهٔ ۱ ـ هرقطر متوازی‌الاضلاع ، آن را به دو مثلث متساوی تقسیم می‌کند .

۴ ـ نتیجهٔ ۲ ـ در متوازی‌الاضلاع ، هر دو زاویهٔ متقابل با هم برابرند .

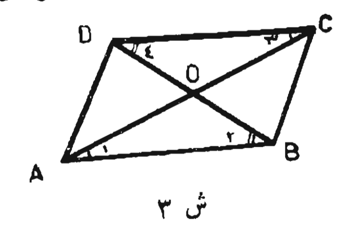
در شکل ۲ : $\hat{A}=\hat{C}$ و $\hat{B}=\hat{D}$

۵ ـ قضیه ـ در متوازی الاضلاع ، هر دو زاویهٔ مجاور مکمل یکدیگرند .

در شکل ۲ ، نسبت به دو متوازی AD و BC و مورب AB زوایای B و A متقابل داخلی می‌شوند و مکمل یکدیگرند ، یعنی : $\hat{A}+\hat{B}=۱۸۰^\circ$.

همین استدلال را برای هردو زاویهٔ مجاور می‌توان کرد .

۶ ـ قضیه ـ در متوازی‌الاضلاع دو قطر یکدیگر را نصف می‌کنند .



ش ۳

برهان ـ دو قطر متوازی‌الاضلاع ABCD (شکل ۳) یکدیگر را در O قطع کرده‌اند ؛ دو مثلث AOB و COD به‌حالت ز ض ز ($AB=CD$ و $\hat{۴}=\hat{۲}$ و $\hat{۳}=\hat{۱}$) متساویند . بنابراین :

$$OB=OD=\frac{BD}{۲} \quad \text{و} \quad OA=OC=\frac{AC}{۲}$$

۷ـ عکس قضیه‌های بالا و نتیجه‌هایی که گفتیم نیز صحیح است ؛ یعنی اگر در چهارضلعی محدبی :

الف ـ دوضلع روبرو متوازی و متساوی باشند ،

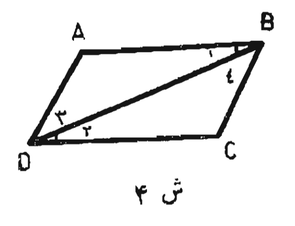
یا : **ب ـ هر دو زاویهٔ متقابل بایکدیگر مساوی باشند ،**

یا : **ج ـ هر دو زاویهٔ مجاور مکمل یکدیگر باشند ،**

یا : **د ـ هرقطر ، شکل را به دو مثلث متساوی تقسیم کند ،**

یا : **هـ ـ دوقطر منصف یکدیگر باشند ،** آن چهار ضلعی متوازی‌الاضلاع است .

قضیهٔ الف ـ فرض :
$AB \parallel$ و $=CD$ (شکل۴).
حکم : $AD \parallel BC$



ش ۴

برهانـ قطر BD راوصل می‌کنیم:

$\hat{۲}=\hat{۱}$ ؛ دو مثلث ABD و BDC به حالت ض ز ض (BD مشترك و $AB=CD$ و $\hat{۲}=\hat{۱}$) متساوی می‌شوند ، پس $\hat{۴}=\hat{۳}$. چون دو خط AD و BC را مورب BD قطع کرده است و دو زاویهٔ متبادل درونی ۳ و ۴ متساوی هستند ، BC موازی است با AD یعنی شکل ، متوازی‌الاضلاع است .

قضیهٔ ب ـ فرض : $\hat{A}=\hat{C}$ و $\hat{B}=\hat{D}$ (شکل ۵) .

حکم : $AB \parallel CD$ و $AD \parallel BC$

ش ۵

برهان ـ می‌دانیم که مجموع زوایای چهارضلعی چهار قائمه است :

$۲\times(۴-۲)=۲\times۲=۴$ قائمه

یعنی : $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=۴$ قائمه

یا : $۲\hat{A}+۲\hat{B}=۴$ قائمه

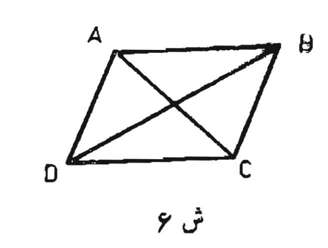
یا : $\hat{A}+\hat{B}=۲$ قائمه

دو خط AD و BC را مورّب AB قطع کرده است و دو زاویهٔ متقابل درونی A و B مکمل یکدیگرند ، پس : $AD \parallel BC$ ، به همین ترتیب $AB \parallel CD$.

قضیهٔ ج ـ با توجه به برهان قسمت ب ، اثبات قسمت ج بر عهدهٔ دانش‌آموزان است .

قضیهٔ د ـ فرض :

$\Delta ADC=\Delta ABC$ و $\Delta ABD=\Delta CBD$ (شکل۶) .



ش ۶

حکم : $AD \parallel BC$ و $AB \parallel DC$

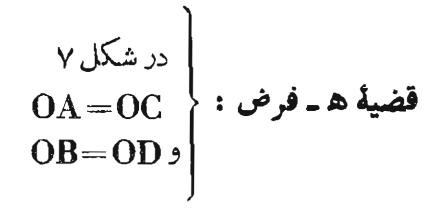
برهان ـ می‌دانیم که در دو مثلث متساوی،زوایای روبروی اضلاع متساوی با یکدیگر برابرند ؛ چون AC در هر دومثلث ABC و ADC مشترك است :

$$\hat{B}=\hat{D}$$

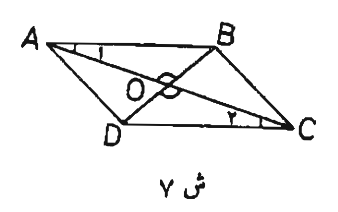
همچنین از تساوی دو مثلث ABD و CBD نتیجه می‌گیریم که :

$$\hat{A}=\hat{C}$$

و بنابر آنچه در قسمت ب گفتیم ، شکل، متوازی‌الاضلاع است .



قضیهٔ هـ ـ فرض : در شکل ۷ $OA=OC$ و $OB=OD$



ش ۷

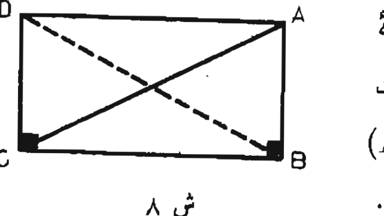
حکم : شکل، متوازی‌الاضلاع است .

برهان ـ دومثلث OAB و OCD به حالت ض‌زض متساوی می‌شوند ؛ پس : $\hat{2}=\hat{1}$ ، یعنی $AB \parallel CD$ و $AB=DC$ ، یعنی دو ضلع AB و DC هم متوازی هستند و هم متساوی ، پس به موجب قضیهٔ الف شکل ، متوازی‌الاضلاع است .

۸ ـ مستطیل ، متوازی الاضلاعی است که یك زاویه‌اش قائمه باشد . از این تعریف با در نظرگرفتن قضایای پیش نتیجه می‌گیریم که

هرچهار زاویهٔ مستطیل قائمه است .

۹ ـ قضیه ـ دو قطر مستطیل باهم برابرند .

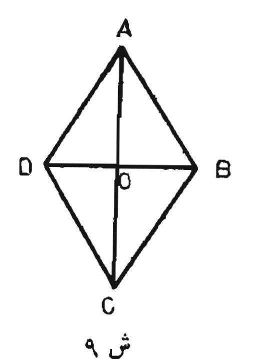


ش ۸

برهان ـ دومثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و DBC (شکل ۸) متساویند (BC درهردومشترك و $AB=CD$) و دو وتر AC و BD باهم برابرند.

۱۰ ـ لوزی ، متوازی‌الاضلاعی است‌که دو ضلع مجاورش با هم برابر باشند . بدیهی است که هرچهار ضلع آن با هم مساوی می‌شوند .

لوزی تمام خواص متوازی‌الاضلاع را دارد .



ش ۹

۱۱ ـ قضیه ـ دو قطر لوزی بر هم عمودند .

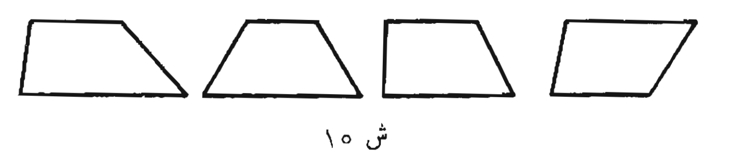
برهان ـ چون O وسط DB است (شکل ۹) ، خط AO میانهٔ مثلث متساوی‌الساقین ADB است و برقاعده عمود است ، یعنی : $AC \perp BD$

۱۲ ـ نتیجه ـ هر قطر لوزی نیمساز دو زاویهٔ متقابل از لوزی است که رئوسشان بر آن قطر قرار دارند.

۱۳ ـ مربع ، مستطیلی است‌که چهار ضلع آن باهم برابر باشند، یا لوزی است که یك زاویهٔ آن قائمه باشد .

۱۴ ـ ذوزنقه ، چهارضلعیی است که فقط دوضلعش با هم موازی باشند . دو ضلع متوازی را **دو قاعده** ، و از دو قاعده آن را که درازتر

است، **قاعدهٔ بزرگتر** و دیگری را **قاعدهٔ کوچکتر** می‌گویند ؛ هر یك



ش ۱۰

از ضلعهای غیر متوازی **ساق** ذوزنقه است . اگر دو ساق با هم مساوی باشند ، ذوزنقه **متساوی‌الساقین** است . اگر یکی از ساقها بر قاعده عمود باشد، ذوزنقه **قائم‌الزاویه** یا **قائم** است (شکل ۱۰) .

۱۵ ـ قضیه ـ در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ، دو زاویهٔ مجاور به هر قاعده متساویند .

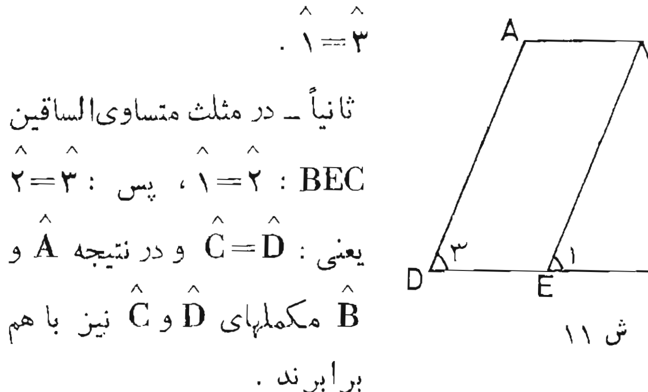
فرض : $AB \parallel CD$ و $AD=BC$ (شکل۱۱) .

حکم : $\hat{A}=\hat{B}$ و $\hat{D}=\hat{C}$

برهان ـ از B خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا قاعدهٔ DC را در E قطع کند .

اولاً ـ $ABED$ متوازی‌الاضلاع است ، پس $BE=AD$ و $\hat{۳}=\hat{۱}$.

ثانیاً ـ در مثلث متساوی‌الساقین BEC : $\hat{۱}=\hat{۲}$ ، پس : $\hat{۳}=\hat{۲}$ یعنی : $\hat{C}=\hat{D}$ و در نتیجه $\hat{A}$ و $\hat{B}$ مکملهای $\hat{D}$ و $\hat{C}$ نیز با هم برابرند .



ش ۱۱

۱۶ ـ قضیه ـ در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، دو قطر با هم برابرند.

فرض : $AB \parallel CD$ و $AD=BC$ (شکل ۱۲) .

حکم : $AC=BD$

ش ۱۲

برهان ـ دو مثلث CBA و DBA به حالت ض ز ض متساویند (AB در هر دو مشترك ، $\hat{A}=\hat{B}$ و $AD=BC$) ، پس : $AC=BD$.

۱۷ ـ قضیهٔ عکس ـ اگر در ذوزنقه‌ای دو قطر متساوی باشند ، ذوزنقه ، متساوی‌الساقین است .

اثبات برعهدهٔ دانش‌آموزان است .

خلاصهٔ مطالب مهم :

۱ ـ متوازی‌الاضلاع ، چهارضلعیی است که اضلاعش دوبدو متوازیند .
۲ ـ در متوازی‌الاضلاع ، هردو ضلع متقابل ، باهم برابرند .
۳ ـ در متوازی‌الاضلاع ، هردو زاویهٔ متقابل، متساویند وهردو زاویهٔ مجاور، مکملند .
۴ ـ هرقطر متوازی‌الاضلاع، آن را به دومثلث متساوی تقسیم می‌کند.
۵ ـ دو قطر متوازی‌الاضلاع ، منصف یکدیگرند .
۶ ـ اگر دریك چهارضلعی محدب ، یکی ازاین ۵ شرط صدق‌کند :
الف ـ دوضلع روبرو، متوازی و متساوی باشند ،
ب ـ هر دو زاویهٔ متقابل ، بایکدیگر مساوی باشند ،
ج ـ هر دو زاویهٔ مجاور، مکمل یکدیگر باشند،
د ـ هر قطر ، شکل را به دومثلث متساوی تقسیم کند ،
هـ ـ دو قطر منصف یکدیگر باشند ،
آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است .

۷- مستطیل، متوازی‌الاضلاعی است‌که یك زاویه‌اش قائمه باشد یاچهارضلعیی است‌که همهٔ زوایایش قائمه‌اند .

۸ - دو قطر مستطیل باهم برابرند .

۹ - علاوه برخاصیت فوق ، مستطیل ، تمام خواص متوازی‌الاضلاع را دارد .

۱۰ - لوزی متوازی‌الاضلاعی است که دوضلع مجاورش باهم برابرند.

۱۱ - لوزی تمام خواص متوازی‌الاضلاع را داراست بعلاوه در لوزی اقطار عمود برهم وهریك نیمساز دو زاویه از زوایای لوزی می‌باشند .

۱۲ - مربع ، مستطیلی است که اضلاعش متساویند .

۱۳ - مربع ، همهٔ خواص متوازی‌الاضلاع و مستطیل و لوزی را دارا می‌باشد .

۱۴ - ذوزنقه،چهارضلعیی است که فقط دو ضلعش با هم موازی باشند . دوضلع متوازی را دو قاعده وهر یك از دوضلع غیرمتوازی را ساق می‌نامند.

۱۵ - اگر دو ساق ذوزنقه‌ای متساوی باشند ، ذوزنقه متساوی‌الساقین است .

۱۶- در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین،دوزاویهٔ مجاور به هرقاعده متساویند.

۱۷- اگر دو زاویهٔ مجاور به یك قاعده از ذوزنقه‌ای متساوی باشند ، ذوزنقه متساوی‌الساقین است .

۱۸ - در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین دوقطر متساویند وبعکس.

تمرین

۱ - نیمسازهای زوایای داخلی یا خارجی چهارضلعی محدب ازتقاطع با یکدیگر چهارضلعی دیگری می‌سازندکه زوایای مقابلش مکمل یکدیگرند.

۲ - دو ذوزنقه که اضلاعشان نظیر بنظیر متساوی باشند، با یکدیگر برابرند .

۳ - هرگاه از رئوس چهارضلعی چهار خط به موازات اقطار آن رسم کنیم ، متوازی‌الاضلاعی بدست می‌آید که سطح آن دو برابر سطح چهارضلعی مفروض است.

۴ - هرگاه بر روی چهار ضلع مربعی چهار پاره‌خط متساوی در یك جهت جدا کنیم، نقاطی که بدست می‌آیند رئوس مربع دیگری هستند.

۵- بر رأس A ازمتوازی‌الاضلاع $ABCD$ خطی مانند d می‌گذرانیم، ثابت‌کنید که فاصلهٔ رأس C ازاین خط مساوی است بامجموع یاتفاضل فواصل دو رأس دیگر از همین خط . (مجموع وقتی که d در خارج متوازی‌الاضلاع باشد وتفاضل وقتی‌که d اضلاع شکل را قطع‌کند) .

۶- اگر ازیك نقطه ازقاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین دوخط موازی با دو ساق بکشیم، ازآن دوخط و ساقهای مثلث، متوازی‌الاضلاعی بوجود می‌آید که محیطش مقداری است ثابت .

۷- نیمسازهای زوایای حادث ازتقاطع امتداد اضلاع متقابل یك‌چهارضلعی محاطی، بریکدیگر عمودند.

۸- هرگاه در دو متوازی‌الاضلاع، دوضلع‌مجاور وفاصلهٔ دوضلع‌متوازی (ارتفاع) متساوی باشند ،آن دو متوازی‌الاضلاع متساویند .

۹ - ازتقاطع نیمسازهای زوایای درونی یا بیرونی متوازی‌الاضلاع یك مستطیل درست می‌شود . چرا ؟ اگر به جای متوازی‌الاضلاع مستطیل باشد ، شکل حادث چه خواهد بود .

۱۰- هرگاه یك قطر متوازی‌الاضلاع، نیمساز یك زاویه ازآن متوازی‌الاضلاع باشد ، شکل لوزی است .

۱۱ - زاویهٔ بین نیمسازهای زوایای حادث از تقاطع امتداد اضلاع متقابل چهارضلعی محدب ، مساوی نصف مجموع دو زاویهٔ متقابل چهارضلعی است .

۱۲- زاویهٔ حادث بین‌نیمسازهای دو زاویهٔ مجاور هرچهارضلعی‌محدب مساوی است با نصف مجموع دو زاویهٔ دیگر .

۱۳ - اگردر دو چهارضلعی، چهار ضلع ویك زاویه نظیر بنظیر متساوی باشند ، دو چهارضلعی متساویند .

۱۴- اگردرچهارضلعی $ABCD$ داشته‌باشیم $AD=BC$ و $\hat{D}>\hat{C}$، ثابت‌کنید که $AC>BD$.

۱۵- مطلوب‌است مکان هندسی‌رأس چهارم متوازی‌الاضلاعی‌که محیطش مقدار ثابتی باشد و دو ضلع مجاورآن بر دو خط مفروض Δ و Δ' قرار داشته باشند .

۱۶ - ازمتوازی‌الاضلاعی این معلومات در دست است ،آن را بسازید:

الف ـ يك ضلع و دو قطر آن .

ب ـ دوضلع ويك قطر آن .

ج ـ دو ضلع ويك زاويهٔ آن .

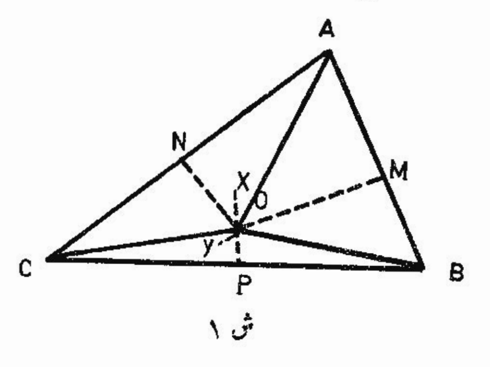
۱۷ـ اگر دريك چهارضلعی دوضلع متقابل باهم و دو قطر باهم مساوی باشند ، چهارضلعی ذوزنقهٔ متساوی‌الساقين است.

فصل نهم

خطهای مهم در مثلث

۱ ـ خطوط مهم مثلث عبارتند از : سه عمود منصف ، سه نیمساز زاویهٔ داخلی ، سه ارتفاع و سه میانه .

۲ ـ قضیه ـ سه عمود منصف اضلاع مثلث بر یك نقطه می‌گذرند .



ش ۱

برهان ـ Px عمود منصف BC و My عمود منصف AB را رسم می‌کنیم (شکل۱)؛ این دو خط مسلماً یکدیگر را قطع می‌کنند (به دلیل آنکه اگر متوازی باشند، لازم می‌آید که AB و CB هم بریك امتداد باشند ، در صورتی که چنین نیست) ، نقطهٔ تقاطع آنها را O می‌نامیم ؛ O چون برروی Px است، از B و C به یك فاصله است یعنی:

$$OB=OC$$

وچون O برروی My نیز هست ، از B و A به یك فاصله است، یعنی :

$$OB=OA$$

از آنجا :

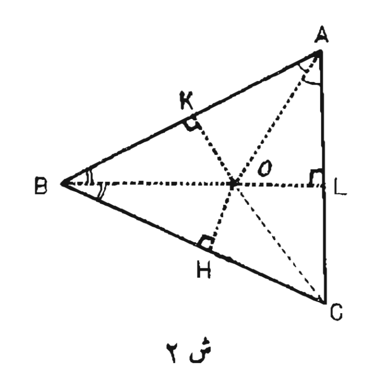
$$OA=OC$$

و O که از A و C به یك فاصله است ، برعمود منصف AC قرار

دارد؛ یعنی عمود منصف AC نیز از O می‌گذرد. پس هر سه عمود منصف بر یك نقطه می‌گذرند.

۳ ـ قضیه ـ سه نیمساز زوایای داخلی هر مثلث بر یك نقطه می‌گذرند.

برهان ـ نیمساز زاویهٔ A و نیمساز زاویهٔ B (شکل۲) را رسم می‌کنیم. این دو خط مسلماً یکدیگر را در یك نقطه قطع می‌کنند، زیراکه با هم‌موازی نیستند (به دلیل آنکه اگر متوازی باشند لازم می‌آید که مجموع $\frac{\hat{B}}{2}$ و $\frac{\hat{A}}{2}$ مساوی $180°$ شود، و چنین چیزی ممکن نیست)، نقطهٔ تقاطع آنها را O می‌نامیم؛ چون O برروی نیمساز $\hat{A}$ است از AB و AC، دوضلع زاویهٔ A، به یك فاصله است:



ش ۲

$$OK = OL$$

همچنین O برروی نیمساز زاویهٔ B واقع است، پس:

$$OK = OH$$

درنتیجه $OH = OL$؛ بنابراین نقطهٔ O از دو ضلع زاویهٔ C به یك فاصله است و بر نیمساز زاویهٔ C واقع می‌باشد.

ازآنجا سه نیمساز متقاربند.

۴ ـ قضیه ـ هر دو نیمساز دو زاویهٔ خارجی مثلث و نیمساز زاویهٔ داخلی غیر مجاور آنها بر یك نقطه می‌گذرند.

برهان ـ نیمسازهای زاویه‌های خارجی B و C یکدیگر را در O قطع می‌کنند؛ عمودهای OE و OD و OF را بترتیب بر AC و BC و AB فرود می‌آوریم (شکل۳). $OE = OD$ (چون O روی نیمساز $\hat{C}$ است).

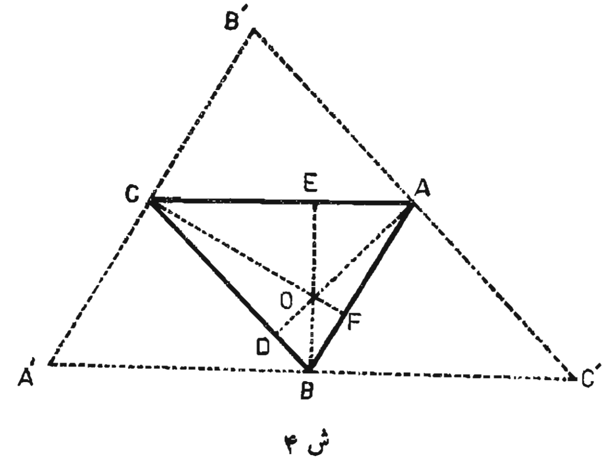
ش ۳

$OF = OD$ (چون O روی نیمساز $\hat{B}$ است).

نتیجه آنکه $OE = OF$، یعنی نقطهٔ O از دوضلع $\hat{A}$ به یك فاصله است، پس نیمساز $\hat{A}$ هم بر O می‌گذرد.

۵ ـ قضیه ـ سه ارتفاع مثلث بر یك نقطه می‌گذرند.

برهان ـ از هر رأس مثلث خطی موازی با ضلع مقابل آن می‌کشیم



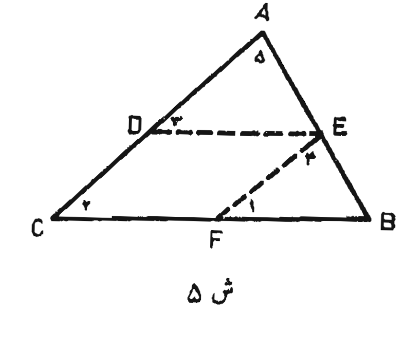
ش ۴

(شکل۴) تا از برخوردشان مثلث A'B'C' بدست آید. ثابت می‌کنیم که هر ارتفاع مثلث ABC عمود منصف یکی از اضلاع مثلث A'B'C'

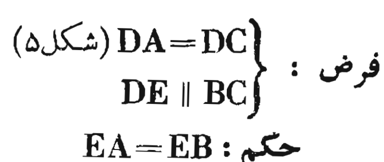
است وچون سه عمود منصف‌اضلاع مثلث $A'B'C'$ متقاربند، صحت قضیه محرز می‌شود .

شکل $BC'AC$ بنا به عمل ، متوازی الاضلاع است ، پس : $AC'=BC$ ؛ و نیز شکل $AB'CB$ ، بنا به عمل ، متوازی‌الاضلاع است ، پس : $AB'=BC$ ؛ بنا براین $AB'=AC'$ و A وسط $C'B'$ است . AD که بر BC عمود است ، بر موازی آن $B'C'$ نیز عمود می‌شود، یعنی AD عمود منصف $B'C'$ است . به‌همین ترتیب BE عمود‌منصف $A'C'$ و FC عمود منصف $A'B'$ است.

۶ ـ قضیه ـ خطی که از وسط یك ضلع مثلث موازی با ضلع دیگر رسم شود ، ضلع سوم را نصف می‌کند .



ش ۵



فرض : $DA=DC$ (شکل۵) ، $DE \parallel BC$

حکم : $EA=EB$

برهان ـ از E خطی موازی‌با AC می‌کشیم تا CB را در F قطع کند . شکل $DEFC$ ، بنا به‌عمل ، متوازی‌الاضلاع است .

پس : $EF=DC=DA$ (۱)

چون اضلاع دو زاویهٔ ۱ و ۳ متوازیند ، $\hat{۳}=\hat{۱}$ (۲)

بعلاوه نسبت به دو متوازی EF و AC و قاطع AE :

$\hat{۴}=\hat{۵}$ (۳)

از روابط ۱ و ۲ و ۳ نتیجه می‌گیریم که دو مثلث ADE و EFB

به حالت ز ض ز متساویند .

بنا براین : $EA=EB$ ، یعنی DE ضلع AB را نصف می‌کنند .

۷ ـ نتیجه ـ طول پاره‌خطی که از وسط یك ضلع مثلث به‌موازات ضلع دیگر رسم و به ضلع سوم محدود شود، مساوی است با نصف ضلع موازی با آن پاره‌خط .

برهان ـ ازمتوازی‌الاضلاع $DEFC$ (شکل۵) وتساوی دومثلث، نتیجه می‌گیریم‌که $DE=FB$ و $DE=FC$ واز آنجا $DE=\frac{BC}{۲}$.

۸ ـ قضیهٔ عکس ـ خطی‌که اوساط دو ضلع مثلثی را به هم وصل کند موازی است با ضلع سوم و مساوی است با نصف آن .

ش ۶

فرض : $DA=DB$ و $EA=EC$ (شکل۶).

حکم : $DE \parallel BC$ و $DE=\frac{BC}{۲}$

برهان ـ اگر DE موازی با BC نباشد از D خطی موازی با BC می‌کشیم تا AC را در E' قطع کند . می‌دانیم که E' وسط AC است ، پس E بر E' منطبق می‌شود ، یعنی DE با BC موازی است ، و مساوی نصف آن نیز هست .

۹ ـ قضیه ـ پاره‌خطی که از وسط یك ساق ذوزنقه موازی با قاعده رسم و به ساق دیگر محدود شود ، ساق دیگر را نصف می‌کند و طول خودش مساوی است با نصف مجموع دو قاعده .

ش ۷

برهان ـ قطر DB را رسم می‌کنیم (شکل۷) . چون در مثلث ADB از نقطهٔ E وسط یك ضلع

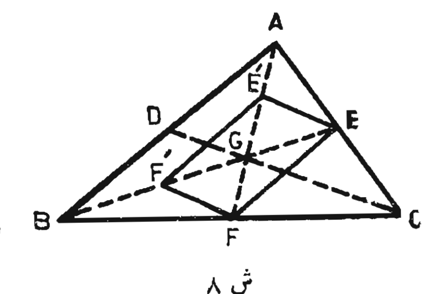
خطی‌موازی با AB رسم‌کرده‌ایم، از وسط DB می‌گذرد و $EM=\frac{AB}{2}$ ؛
وچون درمثلث DCB از نقطهٔ M وسط DB خطی‌موازی با DC کشیده‌ایم،
از F وسط BC می‌گذرد و $MF=\frac{DC}{2}$ بنابراین :

$$EF=EM+MF=\frac{AB}{2}+\frac{DC}{2}=\frac{AB+DC}{2}$$

۱۰ ـ قضیهٔ عکس ـ خطی که اوساط دو ساق ذوزنقه را به هم وصل کند موازی است با قاعده و مساوی است با نصف مجموع دو قاعده .
(اثبات برعهدهٔ دانش آموزان است .)

۱۱ ـ قضیه ـ سه میانهٔ هر مثلث بر یك نقطه می‌گذرند . این نقطه به فاصلهٔ یك سوم هر میانه از وسط ضلع و دو سوم میانه از رأس قرار دارد .

برهان ـ دومیانهٔ AF وBE رارسم می‌کنیم(شکل۸) تایکدیگر را در G قطع کنند . اگر E را به F وصل کنیم بنا برآنچه که می‌دانیم $EF \parallel AB$ و $EF=\frac{AB}{2}$ ؛ و نیز اگر از E' وسط AG به F' وسط BG وصل کنیم ، در مثلث AGB $E'F' \parallel AB$ و $E'F'=\frac{AB}{2}$؛ بنا براین $EF \parallel E'F'$ و $EF=E'F'$ و شکل $E'F'FE$ متوازی‌الاضلاع است ، و درنتیجه :



ش ۸

$$GE=GF'=BF'=\frac{BE}{3} \quad و \quad GB=2GF'=\frac{2BE}{3}$$

یعنی G به فاصلهٔ $\frac{2}{3}$ میانهٔ BE از رأس B و $\frac{1}{3}$ همان میانه از وسط ضلع AC است .

به دلیل مشابه :

$$GA=\frac{2AF}{3} \quad و \quad GF=\frac{AF}{3}$$

بنا براین G ، نقطهٔ تقاطع دو میانه است و بر $\frac{1}{3}$ میانهٔ EB از ضلع AC قرار دارد . حال اگر به جای AF ، میانهٔ CD را با میانهٔ BE در نظر بگیریم باز به همین نتیجه می‌رسیم ، یعنی جایی که میانهٔ CD میانهٔ BE را قطع کند به‌فاصلهٔ $\frac{1}{3}$ از وسط ضلع AC خواهد بود، یعنی همان نقطهٔ G است ، پس سه میانه برG می‌گذرند .

خلاصهٔ مطالب مهم :

۱ ـ سه عمودمنصف اضلاع مثلث بر یك نقطه می‌گذرند .
۲ ـ سه نیمساز زوایای داخلی هرمثلث بریك نقطه می‌گذرند .
۳ ـ در هرمثلث ، دو نیمساز دو زاویهٔ خارجی و نیمساز زاویهٔ داخلی غیرمجاورآنها بریك نقطه می‌گذرند .
۴ ـ سه ارتفاع مثلث بریك نقطه می‌گذرند .
۵ ـ خطی‌که ازوسط یك ضلع مثلث موازی باضلع دیگر رسم شود ضلع سوم را نصف می‌کند .
۶ ـ خطی که اوساط دو ضلع مثلث را به هم وصل کند موازی است با ضلع سوم و مساوی است با نصف‌آن .
۷ ـ پاره خطی که از وسط یك ساق ذوزنقه موازی با قاعده رسم و به ساق دیگرمحدود شود،آن ساق را نصف می‌کند ومساوی است با نصف مجموع دو قاعده .
۸ ـ خطی که اوساط دو ساق ذوزنقه را به هم وصل‌کند موازی است با دو قاعده و مساوی است با نصف مجموع‌آنها .
۹ ـ سه میانهٔ مثلث بریك نقطه می‌گذرند . این نقطه به فاصلهٔ یك سوم میانه از وسط ضلع و دو سوم میانه از رأس قرار دارد .

تمرین

۱ ـ هرگاه از محل تلاقی نیمسازهای داخلی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC دو خط موازی با AB و AC رسم کنیم این خطها ضلع BC را به ۳ جزء متساوی تقسیم می‌کنند .

۲ ـ ثابت کنید که وسطهای ضلعهای هرچهار ضلعی رأسهای یك متوازی‌الاضلاع هستند ؛ درچه صورت این متوازی‌الاضلاع ، مستطیل یا لوزی است .

مثلثی با این معلومات رسم کنید :

۳ ـ دو ضلع و میانهٔ وارد بر یکی از آن دو ضلع .

۴ ـ دو ضلع و میانهٔ وارد برضلع سوم .

۵ ـ دو میانه و ضلعی که میانهٔ آن رسم نشده است .

۶ ـ دو میانه و یکی از دو ضلعی که میانهٔ آنها داده شده است .

۷ ـ سه میانه .

۸ ـ یك ضلع و ارتفاع و میانهٔ وارد برآن ضلع .

۹ ـ دو ارتفاع و ضلعی که ارتفاع آن رسم نشده است .

۱۰ ـ دو ارتفاع و یکی از دو ضلعی که ارتفاعشان داده شده است .

۱۱ ـ دو ضلع و ارتفاع وارد بر ضلع سوم .

۱۲ ـ دو ضلع و ارتفاع وارد بریکی از آنها .

۱۳ ـ وسطهای سه ضلع .

۱۴ ـ یك ضلع وارتفاع وارد برآن و میانهٔ وارد برضلع دیگر .

۱۵ ـ یك ضلع و میانهٔ وارد برآن و ارتفاع وارد بر ضلع دیگر .

۱۶ ـ دو ضلع و شعاع دایرهٔ محیطی .

۱۷ ـ دو زاویه و شعاع دایرهٔ محاطی .

۱۸ ـ دو زاویه و ارتفاع وارد بر ضلع بین آن دو .

۱۹ ـ یك زاویه و دو ارتفاع وارد بر اضلاع آن زاویه .

مثلث متساوی‌الساقینی با این معلومات بسازید :

۲۰ ـ محیط و ارتفاع وارد برقاعده .

مثلث قائم‌الزاویه‌ای با این معلومات بسازید :

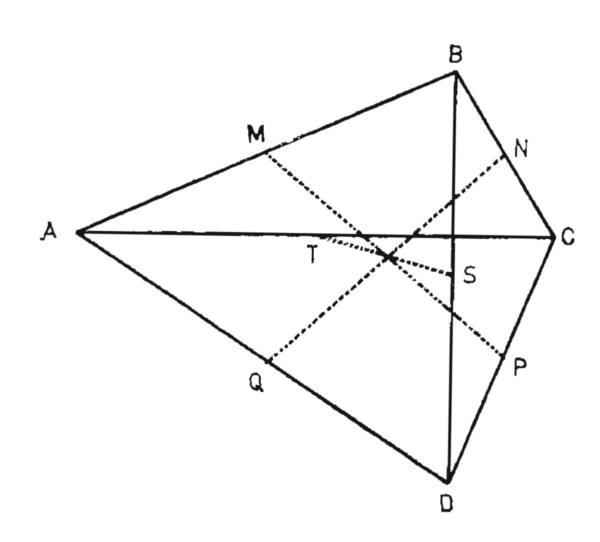
۲۱ ـ یك ضلع و ارتفاع وارد بر وتر .

۲۲ ـ وتر و ارتفاع وارد بر وتر .

۲۳ ـ میانه و ارتفاع وارد بر وتر .

۲۴ ـ وتر و میانهٔ وارد بریك ضلع .

۲۵ ـ در هرچهارضلعی خطهای واصل بین وسطهای هردوضلع متقابل وخط واصل بین وسطهای دو قطر ، متقارنند .



فصل دهم

تقارن

تقارن مرکزی

۱ - تعریف ـ هرگاه نقطهٔ ثابت O و نقطهٔ غیر مشخص دیگری مانند A را درنظر بگیریم و AO را وصل کرده از O به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ A' امتداد دهیم (شکل ۱) ، A' را **قرینهٔ مرکزی A** نسبت به O و O را **مرکز تقارن** می‌گویند . در شکل ۱ ، B' قرینهٔ B و C' هم قرینهٔ C است .

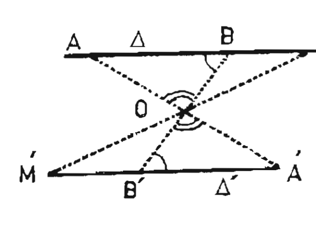
۲ - خاصیت تقارن متقابل است ، یعنی اگر A' قرینهٔ A باشد ، A هم قرینهٔ A' است .

۳ - تعریف ـ قرینهٔ مرکزی هرشکل ، شکلی است که هرنقطه اش قرینهٔ مرکزی یك نقطه از شکل اصلی باشد .

ش ۱

۴- قضیه - قرینهٔ مرکزی خط مستقیم خطی است مستقیم .

برهان - خط Δ و مرکز تقارن O مفروضند (شکل ۲) . دو نقطه مانند A و B بر Δ اختیار می‌کنیم و A' و B' قرینه‌های آنها را نسبت به O بدست می‌آوریم .



ش ۲

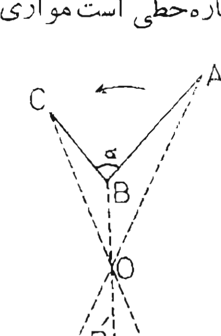
از A' به B' وصل می‌کنیم تا خط مستقیم Δ' حادث شود . از اینکه دو مثلث AOB و $A'OB'$ (به حالت ض‌زض) متساویند ، نتیجه می‌گیریم که $\hat{B'}=\hat{B}$ ، پس $\Delta \parallel \Delta'$ است . حالا ثابت می‌کنیم که خط Δ' قرینهٔ Δ است ، یعنی ثابت می‌کنیم که قرینهٔ هر نقطهٔ Δ بر Δ' واقع است .

در حقیقت اگر از هر نقطهٔ غیر مشخص M از خط Δ به O وصل کرده امتداد دهیم تا Δ' را در M' قطع کند، دومثلث BOM و $B'OM'$ (به حالت ز ض ز) متساوی می‌شوند و OM' با OM مساوی می‌شود ، یعنی M' قرینهٔ M است .

۵ - نتیجه ـ قرینهٔ مرکزی هر پاره‌خط ، پاره‌خطی است موازی و مساوی با آن .

۶ - قضیه ـ قرینهٔ مرکزی هر زاویه ، زاویه‌ای است مساوی وهم‌جهت با آن .

برهان ـ درشکل ۳ ، $\widehat{A'B'C'}$ را قرینهٔ $\widehat{ABC}$ ساخته‌ایم. چون اضلاع دو زاویهٔ حادهٔ α و α' متوازیند ، دو زاویه با هم برابرند . بطوری که مشاهده می‌کنید اگر $\widehat{ABC}$ در جهت مثبت باشد ، $\widehat{A'B'C'}$ نیز در همان جهت است .

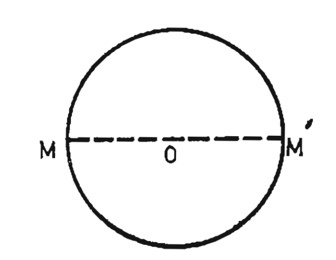


ش ۳

۷ - نتیجهٔ ۱ - قرینهٔ مرکزی هرمثلث ، مثلثی است مساوی با آن . زیرا که اضلاعشان باهم و زوایایشان نیز دوبدو باهم مساویند .

۸ - نتیجهٔ ۲ - قرینهٔ مرکزی هر چندضلعی ، یك چندضلعی است مساوی با آن . زیرا که ضلعها و زاویه‌های آنها نظیر بنظیر متساویند.

۹ ـ مرکز تقارن یك شکل ـ هرگاه در شکلی نقطه‌ای، مانند O ، بتوان یافت که قرینهٔ هر نقطهٔ شکل نسبت به آن برروی خود شکل واقع شود ، آن نقطه را **مرکز تقارن** شکل می‌گویند . مانند O مرکز دایره (شکل ۴) که هرگاه قرینهٔ نقطه‌ای مثل M از دایره را نسبت به آن بدست آوریم، نقطه‌ای مانند M' خواهد شد که برروی دایره واقع است .



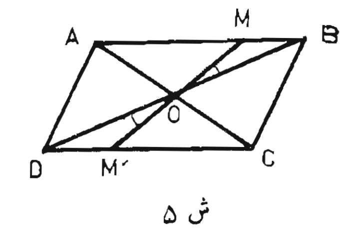
ش ۴

۱۰ ـ قضیه ـ نقطهٔ تقاطع دوقطر متوازی‌الاضلاع ، مرکز تقارن شکل است .

برهان ـ در شکل ۵ ، نقطهٔ M را بریکی از اضلاع متوازی‌الاضلاع اختیارکرده M' قرینهٔ آن را نسبت به O بدست می‌آوریم :

$$OM' = OM$$

دو مثلث MOB و M'OD به حالت ض‌زض متساویند (OB = OD و OM' = OM و $\widehat{MOB} = \widehat{DOM'}$)، پس $\widehat{OBM} = \widehat{ODM'}$ می‌شود. اما می‌دانیم که $\widehat{OBM}$ مساوی $\widehat{ODC}$ است. بنابراین زاویهٔ ODM' مساوی زاویهٔ ODC و در نتیجه M' برروی DC واقع می‌شود ، یعنی قرینهٔ هر نقطهٔ متوازی‌الاضلاع نسبت به O ، روی‌خود متوازی‌الاضلاع قرارمی‌گیرد.

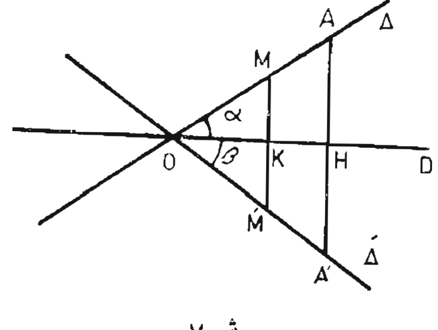


ش ۵

تقارن محوری

۱۱ ـ تعریف ـ هرگاه خط ثابت Δ و نقطهٔ غیرمشخص A را در نظر بگیریم و از A عمود AH را بر Δ فرود آورده از H به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ A' امتداد دهیم (شکل ۶) ، A' را **قرینهٔ محوری A نسبت به Δ** و Δ را **محور تقارن** می‌گویند .

در شکل ۶، B' قرینهٔ B و C' قرینهٔ C است. قرینهٔ هر نقطه مانند I که روی محور باشد ، برخود آن منطبق است .

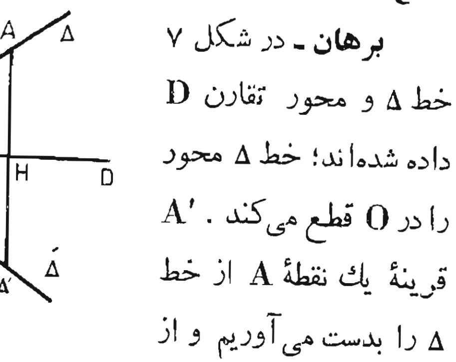


ش ۶

۱۳ ـ تعریف ـ قرینهٔ محوری هر شکل، شکلی است که هر نقطه‌اش قرینهٔ محوری یك نقطه از شکل اصلی باشد .

۱۳ ـ قضیه ـ قرینهٔ محوری خط مستقیم خطی است مستقیم که بر نقطهٔ تقاطع خط و محور می‌گذرد .

برهان ـ در شکل ۷ خط Δ و محور تقارن D داده شده‌اند؛ خط Δ محور را در O قطع می‌کند . A' قرینهٔ یك نقطهٔ A از خط Δ را بدست می‌آوریم و از O به A' وصل می‌کنیم تا خط Δ' بدست آید. دومثلث HOA و HOA' متساویند (A'H = AH ، OH در هردو مشترك و $\hat{H}$ در هردوقائمه)، پس $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$. اکنون ثابت می‌کنیم که Δ' قرینهٔ Δ است ، یعنی ثابت می‌کنیم که قرینهٔ هر نقطهٔ Δ بر Δ' قرار دارد .



ش ۷

اگر از هر نقطهٔ غیرمشخص M از خط Δ عمود MK را برمحور D فرود آورده امتداد دهیم تا Δ' را در M' قطع کند ، در مثلث MOM' خط OK که هم نیمساز و هم ارتفاع است ، میانه نیز هست ، پس $KM'=KM$ است ، یعنی M' قرینهٔ M است .

۱۴ ـ نتیجهٔ ۱ـ قرینهٔ محوری هرخط که موازی بامحور باشد ، با محور موازی است .

۱۵ ـ نتیجهٔ ۲ ـ قرینهٔ محوری هرپاره‌خط با خودآن مساوی است .

۱۶ ـ قضیه ـ قرینهٔ محوری هرزاویه، زاویه‌ای‌است مساوی باآن و در جهت مخالف آن .

برهان ـ $\widehat{A'B'C'}$ قرینهٔ $\widehat{ABC}$ را بدست می‌آوریم (شکل ۸) ، $ABB'A'$ ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین است ، پس : $\widehat{A'B'H}=\widehat{ABH}$ ، و به دلیل مشابه : $\widehat{C'B'H}=\widehat{CBH}$ و پس از تفریق : $\widehat{A'B'H}-\widehat{C'B'H}=\widehat{ABH}-\widehat{CBH}$ و از آنجا : $\widehat{A'B'C'}=\widehat{ABC}$

ش ۸

بطوری‌که مشاهده می‌کنید ، اگر جهت $\widehat{ABC}$ مثلاً موافق با جهت دوران عقربه‌های ساعت باشد ، جهت $\widehat{A'B'C'}$ مخالف آن است .

۱۷ ـ نتیجهٔ ۱ ـ قرینهٔ محوری هرمثلث ، مثلثی است مساوی باآن . زیراکه اضلاع مثلث قرینه با اضلاع مثلث اصلی مساویند .

۱۸ ـ نتیجهٔ ۲ ـ قرینهٔ محوری هر چندضلعی ، یك چندضلعی است مساوی با آن .

استدلال مانند قرینهٔ مرکزی چندضلعی است و بیان آن برعهدهٔ دانش‌آموزان است .

۱۹ ـ محور تقارن یك شکل ـ هرگاه روی یك شکل، خطی بتوان یافت‌که قرینهٔ محوری هر نقطه از شکل نسبت به‌آن خط برروی خود شکل واقع شود ، آن خط را **محور تقارن** شکل گویند . مانند هرقطر دایره که وقتی قرینهٔ نقطه‌ای مانند M از دایره را نسبت به‌آن بدست آوریم، نقطهٔ M' می‌شود که همچنان بر روی دایره است (شکل ۹) .

ش ۹

برخی اشکال، مرکزتقارن دارند ومحور تقارن ندارند، مانند متوازی‌ـ الاضلاع ؛ بعضی محور تقارن دارند ومرکز تقارن ندارند ، مانند مثلث متساوی‌الساقین که ارتفاع وارد برقاعده‌اش محور تقارن است ؛ بعضی محورهای تقارن متعدد دارند ، مانند مثلث متساوی‌الاضلاع که هر ـ ارتفاعش یك محور تقارن است؛ پاره‌ای از اشکال هم مرکز تقارن‌دارند و هم محور تقارن ، مانند دایره و لوزی و مستطیل . البته بیشتر شکلها نه مرکز تقارن دارند و نه محور تقارن ، مانند مثلث غیر مشخص یا ذوزنقه‌ای‌که متساوی‌الساقین نباشد .

خلاصهٔ مطالب مهم :

۱ ـ برای پیدا کردن قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ O خط AO را وصل کرده از O به اندازهٔ خودش تا A' امتداد می‌دهیم ، A' را قرینهٔ A نسبت به O و O را مرکز تقارن می‌نامند .

۲ ـ قرینهٔ مرکزی هرقطعه‌خط، پاره‌خطی است موازی ومساوی باآن.

۳ - قرینهٔ مرکزی هرزاویه، زاویه‌ای است مساوی و هم‌جهت با آن .
۴ - قرینهٔ مرکزی هرشکل ، شکلی است مساوی با آن .
۵ - هرگاه درشکلی نقطه‌ای بتوان یافت که قرینهٔ هر نقطهٔ شکل نسبت به‌آن برروی خود شکل واقع شود، آن نقطه را مرکز تقارن شکل می‌گویند .
۶ - نقطهٔ تلاقی دوقطر متوازی‌الاضلاع، مرکز تقارن‌آن است.
۷ - برای پیداکردن قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خط Δ عمود AH را بر Δ فرود می‌آوریم و از H به اندازهٔ خودش تا A' امتداد می‌دهیم ، A' را قرینهٔ محوری A نسبت به Δ می‌نامند . Δ را محور تقارن می‌گویند .
۸ - قرینهٔ محوری هرقطعه‌خط ، قطعه‌خطی است مساوی با آن .
۹ - قرینهٔ محوری هرزاویه ، زاویه‌ای است مساوی با آن و در جهت مخالف‌آن .
۱۰ - قرینهٔ محوری هرشکل ، شکلی است مساوی با آن .
۱۱ - هرگاه خطی بتوان یافت که قرینهٔ محوری هر نقطهٔ شکلی نسبت به‌آن خط برروی خود شکل واقع باشد ، آن خط را محور تقارن آن شکل گویند .

تمرین

۱ - ثابت کنید که اگر دو شکل F_2 و F_3 قرینه‌های F_1 نسبت به دو نقطهٔ O و O_1 باشند ، اضلاع متناظر آنها با هم موازیند .
۲ - ثابت کنید که قرینه‌های یك شکل نسبت به دو محور مفروض ، متساوی و در یك جهت هستند .
۳ - قرینه‌های نقطهٔ تلاقی ارتفاعات هرمثلث نسبت به هریك از اضلاع آن برروی دایرهٔ محیطی مثلث قرار دارند .
۴ - خط Δ ونقطهٔ O و دایرهٔ C داده شده‌اند. برخط Δ نقاطی بدست آوریدکه قرینه‌هایشان نسبت به O روی دایرهٔ C باشند .
۵ - دو نقطهٔ M و N در یك طرف خط Δ داده شده است . برروی Δ نقطه‌ای بیابیدکه مجموع فاصله‌هایش از M و N کوچکترین مقداری‌که ممکن است بشود .
۶ - خطی رسم‌کنیدکه سه خط مفروض d_1 ، d_2 و d_3 را در M ، N و P قطع‌کند و $MN = NP$ باشد (عدهٔ جوابهای مسئله ؟) .

فصل یازدهم

کلامی چند در بارهٔ حل مسائل هندسه

تمرینات هندسه بسیار متنوع است و برای حل آنها ، چون یك روش قطعی در دست نیست، بناچار باید از راههای مختلف و با توجه به قضایای مختلف فکر کرد و این بزرگترین عامل تقویت قوای دماغی و فکری است .

نکاتی چند را تذکرمی‌دهیم که اگر با جدیت و سعی دانش آموزان و راهنمایی و مراقبت دبیران توأم شود، بدون تردید تمام تمرینات این کتاب درجریان سال تحصیلی حل خواهند شد .

الف - برای حل مسئلهٔ هندسی ، روشی که بیشتر می‌توان از آن استفاده کرد،روش تجزیه وتحلیل است و آن این است که مسئله‌ای را که باید حل کرد ، حل شده انگاریم یا قضیه‌ای را که باید ثابت کنیم ، صحیح فرض کرده و به خواصی که از آن نتیجه می‌شود پی ببریم و از خاصیتی به خاصیت دیگر، یا از نتیجه‌ای به نتیجهٔ دیگر برویم تا وقتی که به یك نتیجهٔ مسلم وقطعی برسیم. برای رسیدن از نتیجه‌ای که مسلم فرض شده به یك نتیجهٔ قطعی ، بناچار استدلالی کرده‌ایم ؛ چون این استدلال را از آخر شروع کنیم ، یعنی از نتیجهٔ قطعی و مسلم نهایی که بدست آورده‌ایم آغاز کنیم و بتدریج ، خاصیت بخاصیت در جهت مخالف

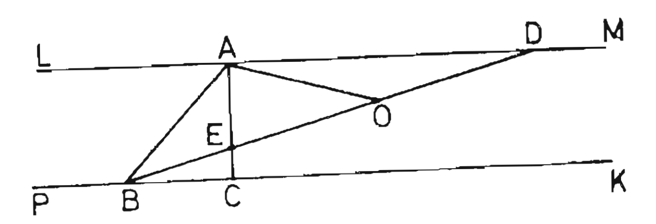
آنچه‌که قبلاً کرده‌ایم پیش برویم ، به نتیجه‌ای که نخست صحیح فرض کرده بودیم و اکنون صحت آن محرز می‌شود ، خواهیم رسید .

البته باید خواصی که از یکدیگر نتیجه می‌گیریم، صحیح و منطقی ومربوط به یکدیگر باشند .

مثال ۱ - دوخط متوازی LM و PK را مایل AB و عمود AC قطع کرده‌اند؛ مایل BD را چنان رسم می‌کنیم‌که ED = ۲AB باشد. ثابت کنید که:

$$\widehat{EBC} = \frac{1}{3}\widehat{ABC}$$

حل - فرض می‌کنیم‌که نتیجه صحیح و $\widehat{ABC}$ سه برابر $\widehat{EBC}$ باشد (شکل ۱). در این صورت لازم می‌آید که $\widehat{ABE} = 2\widehat{EBC}$ شود؛



ش ۱

و چون $\widehat{ADE} = \widehat{EBC}$ است ، باید $\widehat{ABE} = 2\widehat{ADE}$ شود . اگر از A به O وسط ED وصل‌کنیم ، می‌دانیم‌که AO میانهٔ مثلث قائم‌الزاویه ومساوی نصف وتر است ، یعنی :

$$\widehat{AOE} = 2\widehat{ADE} \quad و \quad AO = OD = OE$$

پس $\widehat{ABE} = \widehat{AOE}$ خواهد شد ، یعنی مثلث ABO متساوی‌الساقین می‌شود و : $AB = AO = OE = \frac{ED}{2}$ می‌باشد .

بنابراین اگر نتیجه‌صحیح فرض شود، باید $AB = \frac{ED}{2}$ باشد؛ اما

این نتیجه، بنابرفرض‌مسئله صحیح است ؛ پس‌صحت $\widehat{EBC} = \frac{1}{3}\widehat{ABC}$ نیز محرز می‌باشد .

استدلال قهقرایی چنین‌خواهد بود : چون $AB = \frac{ED}{2}$ و $AO = \frac{ED}{2}$ است ، $AB = AO$ و $\widehat{ABO} = \widehat{AOB}$ خواهدبود. اما درمثلث متساوی‌الساقین AOD : $\widehat{AOB} = 2\widehat{ADO}$ و در دو متوازی مفروض و مورب DB : $\widehat{ADO} = \widehat{OBC}$ ، پس : $\widehat{ABO} = 2\widehat{OBC}$.

یا : $\widehat{OBC} = \frac{1}{3}\widehat{ABC}$

مثال ۲ - هرگاه از G محل تلاقی میانه‌های مثلث ، خطی بگذرانیم واز A و B و C ، رئوس مثلث ، عمودهای 'AA و 'BB و 'CC را بر آن فرود آوریم ، طول عمودی که دریك‌طرف خط است ، برابر است با مجموع دوعمودی که در طرف دیگرآن است .

حل - در شکل ۲ باید ثابت کنیم $AA' = BB' + CC'$ اگرنتیجه مسلم باشد، لازم می‌آید‌که : $AA' = 2MM'$ باشد،

ش ۲

('MM از وسط BC به‌موازات 'BB و 'CC کشیده شده وبرابر نصف مجموع آنهاست) ؛ یاچون از K وسط AG خط 'KK را موازی‌با 'AA رسم‌کنیم، باید $KK' = MM'$ باشد.اماتساوی 'MM و 'KK ازبرابری مثلثهای 'GKK و 'GMM محرز می‌باشد ، زیرا که $KG = GM$ و $\widehat{K'KG} = \widehat{M'MG}$ و $\widehat{KGK'} = \widehat{MGM'}$.

بنابراین صحت مسئله نیز مسلم می‌شود .
استدلال قهقرایی برعهدهٔ دانش‌آموزان است .

ب - نکتهٔ دیگر که باید مورد توجه قرار گیرد این است که **مکانهای هندسی** در حل مسائل ، بخصوص آنها که به یافتن نقاطی با شرایط معین مربوط می‌شوند، نقش مهمی ایفا می‌کنند و باید برای‌تعیین نقاط ، از فصل مشترك مکانهای هندسی استفاده‌کرد.

مثال ۱ - نقطه‌ای تعیین‌کنید که از دوخط d و d_1 به یك فاصله و از خط d_2 به فاصلهٔ l باشد .

حل - مکان هندسی نقاطی‌که از دوخط d و d_1 به یك فاصله‌اند، نیمساززاویهٔ حادث میان‌آنهاست ومکان هندسی نقاطی‌که از خط d_2 به فاصلهٔ l باشند، خطی‌است موازی‌باآن و به فاصلهٔ l ازآن و نقطهٔ مطلوب، فصل‌مشترك مکانهای‌هندسی نامبرده است . چون میان d و d_1 دو زاویه پدید می‌آید ، دو نیمساز زاویه رسم می‌شود وچون دو خط نیز می‌توان یافت که جمیع نقاطشان از d_2 به فاصلهٔ l باشند ، مسئله عموماً چهار جواب دارد .

مثال ۲ - نقطه‌ای تعیین‌کنیدکه از دو نقطهٔ A و B به یك فاصله باشد، همچنین از دو نقطهٔ C و D .

حل - مکان هندسی نقاطی‌که از A و B به یك فاصله‌اند،عمود‌منصف AB است و نیز جمیع نقاط واقع بر عمود منصف CD از دونقطهٔ C و D به یك فاصله‌اند ، پس هرجا دو عمود منصف یکدیگر را قطع کنند ، جواب مسئله است .

در صورتی که دو امتداد AB و CD متوازی و همچنین منطبق

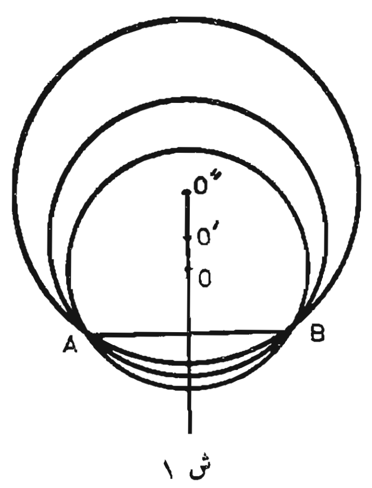
بر هم نباشند ، مسئله یك جواب دارد واگر دو امتداد AB و CD باهم موازی یا برهم منطبق باشند ، مسئله دارای جواب نیست مگر اینکه دو امتدادAB و CD برهم منطبق و وسط AB نیز بر وسط CD منطبق باشد یا اینکه AB و CD متوازی وعمود منصف‌های آنها برهم منطبق باشندکه در این صورت ، مسئله جوابهای بیشمار خواهد داشت .

فصل دوازدهم

دایره

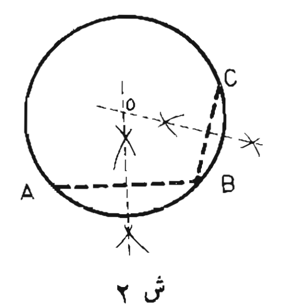
اوضاع خط و دایره

۱ - الف - هرگاه بخواهیم بر دو نقطه مانند A و B (شکل ۱) دایره‌ای بگذرانیم ، مرکز دایره روی عمود منصف پاره‌خط AB قرار خواهد داشت . چون هر نقطهٔ این عمود منصف می‌تواند مرکز یك دایره باشد که بر A و B مرور کند ، نتیجه می‌گیریم که **بر دو نقطه دایره‌های بیشماری می‌گذرد .** بخصوص، یکی از این دایره‌ها به قطر AB است که مرکزش نقطهٔ وسط AB می‌باشد .



ش ۱

ب - هرگاه بخواهیم بر سه نقطه مانند A ، B و C (شکل ۲) که برروی یك خط راست نیستند ، دایره‌ای بگذرانیم، مرکز دایره، هم برعمود منصف AB وهم برعمود منصف BC واقع است. این دایره منحصر به‌یکی است زیراکه اگر دایرهٔ دیگری هم برسه نقطهٔ مذکور بگذرد مرکز آن باید

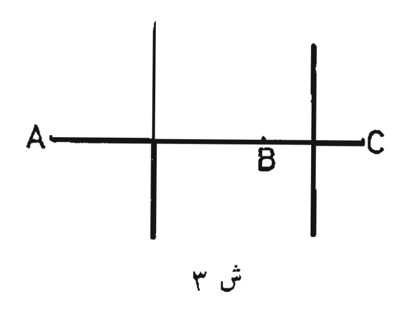


ش ۲

روی عمود منصفهای AB و BC ، یعنی بر محل تقاطع آنها، باشد؛ پس مرکز آن همان نقطهٔ O است . بنابراین **بر سه نقطه که برروی یك خط راست نباشند ، فقط یك دایره می‌توان گذراند .**

هرگاه سه نقطهٔ A ، B و C برروی یك خط راست باشند (شکل ۳)، واضح است که عمود منصفهای AB و BC با یکدیگر موازی هستند و نقطهٔ مشترك ندارند ؛ پس :

برسه نقطه‌که برروی یك خط راست باشند ، نمی‌توان دایره‌ای مرور داد .



ش ۳

از اینجا این نتیجهٔ مهم بدست می‌آیدکه : **خط راست نمی‌تواند با دایره بیش از دو نقطهٔ مشترك داشته باشد .**

زیرا که اگر بیشتر از دو نقطهٔ مشترك داشته باشد ، لازم می‌آید که برسه نقطه ازآن نقاط ، یك دایره بگذرد و این امر ممکن نیست .

۲ ـ اکنون در وضع خط و دایره بحث می‌کنیم .

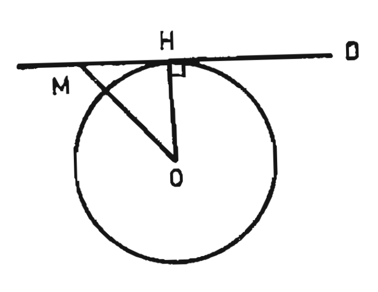
هرگاه خط D و دایرهٔ O در نظرگرفته شوند و از نقطهٔ O عمود OH را بر D فرود آوریم وطول OH را l وشعاع دایره را R بنامیم ، ممکن است یکی از این سه وضع پیش بیاید :

ش ۴

۱) $l > R$ باشد. دراین‌صورت H خارج از دایره است (شکل۴)

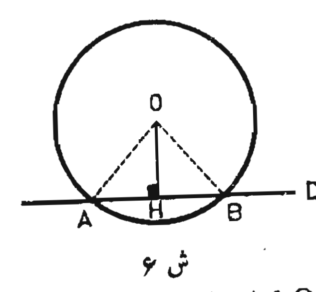
و هر نقطهٔ دیگر M از خط D نیز خارج از دایره واقع می‌شود ، به دلیل اینکه : $OM>OH$ پس $OM>R$ است ؛ در نتیجه خط D با دایره نقطهٔ مشترك ندارد .

۲) $l=R$ باشد (شکل ۵) . در این صورت H روی دایره است ، اما هر نقطهٔ دیگر مانند M از خط D در خارج دایره است ؛ به دلیل اینکه : $OM>OH$ یعنی $OM>R$ است ؛ در این حالت خط D با دایره **فقط یك نقطهٔ مشترك دارد** . چنین خطی را **مماس** بر دایره می‌گویند ؛ H را نقطهٔ تماس وشعاع OH را **شعاع نقطهٔ تماس** می‌نامند. بسادگی ثابت می‌شود که : **شعاع نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است** .



ش ۵

۳) $l<R$ است (شکل۶). در این صورت در دوطرف عمود OH دو مایل مانند OA و OB به طول R می‌توان رسم کرد؛ دو نقطهٔ A و B ، انتهای این دو مایل ، برروی دایرهٔ O قرار دارند ، یعنی بین خط D و دایرهٔ O مشترك هستند ؛ به بیان دیگر، در این حالت ، خط D با دایرهٔ O دو نقطهٔ مشترك پیدا می‌کند.



ش ۶

خطی را که با دایره دو نقطهٔ مشترك داشته باشد ، **قاطع** دایره و دو نقطهٔ مشترك را نقاط تقاطع آن خط با دایره می‌نامند ؛ پس خطی که قاطع دایره باشد ، دایره را در دو نقطه قطع می‌کند .

مطالبی که شرح آن‌گذشت ، به صورت زیر خلاصه می‌شوند :

۱) هرگاه فاصلهٔ مرکز دایره از خطی بزرگتر از شعاع دایره باشد ، آن خط با دایره نقطهٔ مشترك ندارد .
۲) هرگاه این فاصله مساوی شعاع باشد، خط بردایره مماس است.
۳) اگر این فاصله کوچکتر از شعاع باشد ، آن خط ، دایره را در دو نقطه قطع می‌کند .

۳ - بعکس بآسانی می‌توان فهمید که :

۱) اگر خطی با دایره نقطهٔ مشترك نداشته باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از آن خط ، بزرگتر است از شعاع .
۲) اگر خطی بر دایره مماس باشد ، فاصلهٔ مرکز دایره از آن خط ، مساوی است با شعاع .
۳) اگر خطی دایره‌ای را قطع کند ، فاصلهٔ مرکز دایره از آن خط ، کوچکتر است از شعاع .

استدلال این قسمت برعهدهٔ دانش‌آموزان است .

اوضاع دو دایره نسبت به هم

۴ - هرگاه دو دایرهٔ O و O′ به‌شعاعهای R و R′ رادر نظرگرفته و فاصلهٔ O و O′ (یعنی طول **خط‌المرکزین** دو دایره) را به d نمایش دهیم و خط OO′ را وصل‌کنیم ومحل برخورد OO′ با دایرهٔ O را نقطهٔ A و با دایرهٔ O′ را نقطهٔ B بنامیم ، یکی از پنج وضع مختلف ممکن است‌پیش‌بیاید، به‌این قرار:

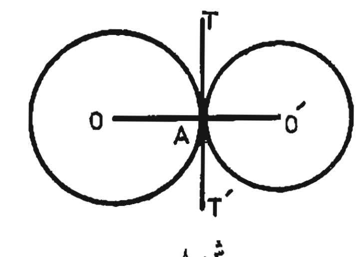
۱) $d > R+R'$ باشد (شکل۷) ؛ به جای d مساویش $OB+R'$ را می‌گذاریم ، نتیجه می‌شود :

ش ۷

$OB+R'>R+R'$ و از آنجا $OB>R$.

در نقطهٔ B مماس Δ را بر دایرهٔ O′ رسم می‌کنیم، Δ بر OO′ عمود می‌شود (چرا؟).

چون $OB>R$ است، Δ با دایرهٔ O نقطهٔ مشترك ندارد و دایرهٔ O′ هم که طرف دیگر Δ است، با دایرهٔ O نقطهٔ مشترك نمی‌تواند داشته باشد؛ پس هریك از دو دایره خارج دیگری است. چنین دو دایره را **متخارج** گویند.

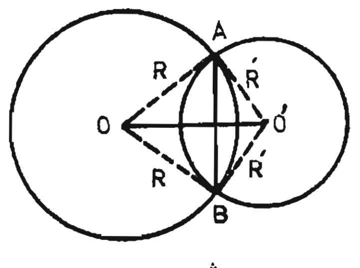


ش ۸

۲) $d=R+R'$ باشد (شکل ۸). در این صورت نقطهٔ A که به فاصلهٔ R از O روی خط OO′ اختیار شود، متعلق به هر دو دایره است؛ به دلیل آنکه $OA=R$ و

$$O'A=OO'-OA=d-R=R+R'-R=R'$$

پس دو دایره یك نقطهٔ مشترك دارند. حال اگر از A خطی بر OO′ عمود کنیم، بر هر دو دایره مماس می‌شود (به چه دلیل؟) و چون دو دایره در دو طرف این خط قرار دارند، نقطهٔ مشترك دیگری نمی‌توانند داشته باشند. چنین دو دایره را **مماس خارج** نامند.



ش ۹

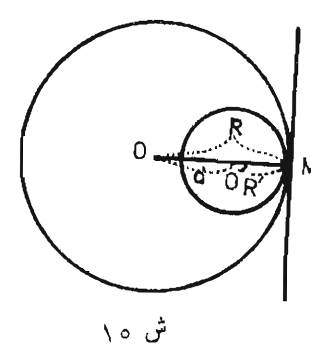
۳) $R-R'<d<R+R'$ باشد (شکل ۹). در این صورت d، R و R′ می‌توانند سه ضلع مثلثی باشند که دو رأس آن O و O′ باشند. اگر رأس سوم مثلث را A بنامیم، چون $OA=R$ و $O'A=R'$،

A روی هر دو دایره قرار دارد و مشترك بین آنهاست؛ اگر B قرینهٔ A را نسبت به OO′ بدست آوریم، $OB=OA=R$ و $O'B=O'A=R'$ خواهند بود، یعنی B هم روی هردو دایره است. پس دودایره دو نقطهٔ مشترك دارند. چنین دو دایره را **متقاطع** گویند و AB وتر مشترك آنهاست.

در دو دایرهٔ متقاطع، خط‌المرکزین بروتر مشترك عمود است و آن را نصف می‌کند.

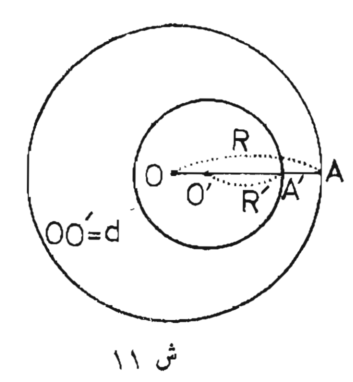
بدیهی است که دو دایره بیشتر از دو نقطهٔ مشترك نمی‌توانند داشته باشند زیرا که برسه نقطه فقط یك دایره می‌گذرد.

۴) $d=R-R'$ باشد (شکل ۱۰). دراین صورت برامتداد OO′ و در طرف O′ نقطهٔ M را به فاصلهٔ R از O اختیار می‌کنیم، یعنی $OM=R$؛ وچون $O'M=OM-OO'=R-(R-R')=R'$، M بر روی هر دو دایره قرار دارد و مشترك بین آنهاست. حال می‌گوییم این دو دایره غیر از M، که بر امتداد خط‌المرکزین دو دایره و در طرف O′ است، نقطهٔ مشترك دیگری نمی‌توانند داشته باشند؛



ش ۱۰

زیرا که اگر مثلاً درنقطهٔ N، خارج خط‌المرکزین، نیز مشترك باشند، سه نقطهٔ O و O′ و N مثلثی به اضلاع R و R′ و d تشکیل می‌دهند که درآن $d>R-R'$ می‌شود و این خلاف فرض $d=R-R'$ است؛ پس دو دایره فقط یك نقطهٔ مشترك دارند. چنین دو دایره را



ش ۱۱

مماس داخل گویند .

۵) $d < R - R'$ باشد (شکل ۱۱).

دراین صورت دو دایره هیچ نقطهٔ مشترك نمی‌توانند داشته باشند؛ زیراکه اگر مثلاً یکدیگر را در نقطه‌ای مانند M قطع‌کنند، باسه‌نقطهٔ O ، O' و M مثلثی تشکیل می‌شود به اضلاع R و R' و d و در آن $d > R - R'$ خواهد بود و این معنی ، مخالف فرض $d < R - R'$ است. چنین دو دایره را **متداخل** می‌نامند . بنابراین بطور خلاصه :

هرگاه در دو دایره $d > R + R'$ باشد، دو دایره متخارجند.
» » » $d = R + R'$ » » **مماس‌خارجند .**
» » » $\begin{cases} d < R + R' \\ d > R - R' \end{cases}$ » » **متقاطعند .**
» » » $d = R - R'$ » » **مماس‌داخلند .**
» » » $d < R - R'$ » » **متداخلند .**

۵ ـ با استفاده از طریقهٔ برهان خلف می‌توان بعکس ، ثابت کرد که :

۱ ـ اگر دودایره متخارج باشند ، $d > R + R'$
۲ ـ » » **مماس خارج** » ، $d = R + R'$
۳ ـ » » **متقاطع** » ، $R - R' < d < R + R'$
۴ ـ » » **مماس داخل** » ، $d = R - R'$
۵ ـ » » **متداخل** » ، $d < R - R'$

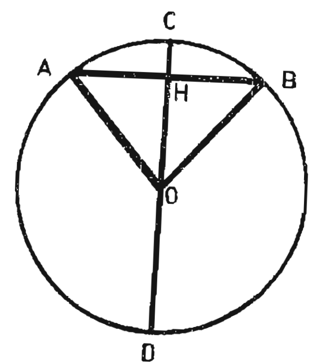
برای نمونه فقط یکی از پنج حالت را ثابت می‌کنیم ؛ مثلاً اگر دو دایره مماس خارج باشند ، $d = R + R'$ است .

برهان ـ اگر $d = R + R'$ نباشد، باید یکی ازچهارحالت دیگر را داشته باشد و دراین صورت دو دایره یکی از چهار وضع دیگر را

خواهند داشت و این خلاف فرض مماس خارج بودن دو دایره است ؛
پس بناچار : $d = R + R'$

قوس و وتر

۶ ـ قضیه ـ قطر عمود بر وتر، وتر و قوسهای آن را نصف می‌کند .



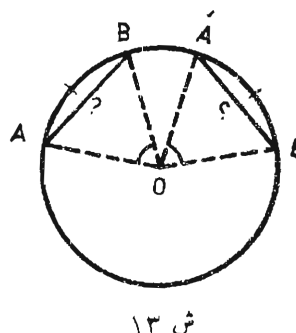
ش ۱۲

فرض : $AB \perp OH$ (شکل۱۲).

حکم :
۱ ـ $HA = HB$
۲ ـ $\widehat{AC} = \widehat{CB}$
۳ ـ $\widehat{AD} = \widehat{BD}$

برهان : ۱ ـ در مثلث متساوی‌الساقین OAB عمود OH قاعدهٔ AB را نصف می‌کند ۲ ـ از برابری $\widehat{AOH}$ و $\widehat{BOH}$ لازم می‌آید $\widehat{AC} = \widehat{CB}$ باشد، ۳ ـ چون از دونیمدایرهٔ CAD و CBD دوقوس متساوی CA و CB را کم کنیم ، $\widehat{AD} = \widehat{BD}$ می‌شود .

۷ ـ قضیه ـ هرگاه در دایره‌ای دو وتر متساوی باشند ، قوسهای آنها نیز متساویند .



ش ۱۳

فرض : $AB = A'B'$ (شکل۱۳).

حکم : $\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$.

برهان ـ $\Delta OAB = \Delta OA'B'$ (حالت ض‌ض‌ض) .

پس : $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$

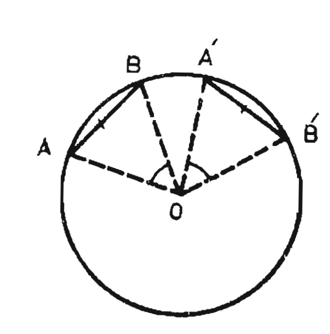
و در نتیجه : $\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$.

۸ ـ قضیه ـ در دایره‌ای هرگاه دو قوس متساوی باشند ، وترهای آنها نیز متساویند .

فرض : $\widehat{AB}=\widehat{A'B'}$ (شکل ۱۴).

حکم : $AB=A'B'$.

برهان ـ از تساوی دو قوس لازم می‌آید که دو زاویهٔ مرکزی مقابل به آنها متساوی باشند ؛ یعنی $\widehat{AOB}=\widehat{A'OB'}$ باشد ؛ پس دو مثلث AOB و $A'OB'$ به حالت ض ز ض متساوی می‌شوند و $AB=A'B'$.



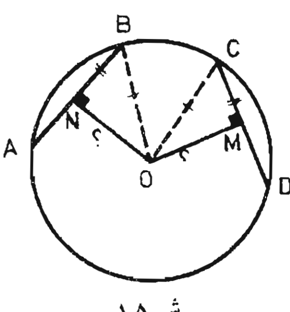
ش ۱۴

۹ ـ قضیه ـ درهر دایره، وترهای متساوی، ازمرکز به‌یك فاصله‌اند.

فرض : $AB=CD$ و $ON \perp AB$ و $OM \perp CD$ (شکل ۱۵) .

حکم : $ON=OM$.

برهان ـ چون ON برAB عمود است ، $BN=\frac{AB}{۲}$ ؛ به همین دلیل $CM=\frac{CD}{۲}$ ؛ دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OBN و OCM متساویند زیرا که : $BN=CM$ و $OB=OC$ و ازآنجا : $ON=OM$ است .



ش ۱۵

۱۰ ـ قضیهٔ عکس ـ درهر دایره، وترهایی‌که ازمرکز به‌یك فاصله هستند ، متساویند .

فرض : $ON \perp AB$ و $OM \perp CD$ و $ON=OM$ (شکل ۱۶) .

حکم : $AB=CD$.

برهان ـ دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ONB وOMC (به‌حالت وتر ویك ضلع) متساویند ، پس $NB=MC$ یا به‌عبارت دیگر، $\frac{AB}{۲}=\frac{CD}{۲}$ ، یعنی $AB=CD$ است .

ش ۱۶

۱۱ ـ قضیه ـ در یك دایره ، از دو وتر نامتساوی آن که بزرگتر است ، به مرکز دایره نزدیکتر است .

فرض : $AB>CD$ و $OP \perp AB$ و $OQ \perp CD$ (شکل۱۷).

حکم : $OP<OQ$.

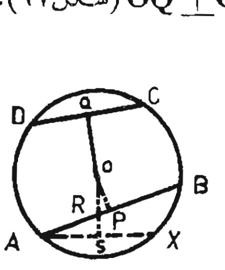
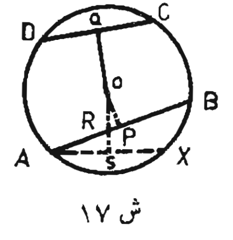
برهان ـ اگرقوس Ax را مساوی $\widehat{CD}$ جدا کنیم ، x بین B و A واقع می‌شود و وتر CD مساوی وتر Ax است .

عمود OS را برAx رسم می‌کنیم تا AB را در R قطع کند، واضح است‌که: $OP<OR$

اما OR جزئی‌است از OS . درنتیجه :

$$OP<OS$$

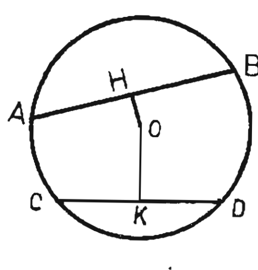
و چون $OS=OQ$ است ، $OP<OQ$ خواهد بود .

ش ۱۷

۱۲ـ قضیهٔ عکس ـ دریك دایره، از دو وتر که از مرکز دایره به یك فاصله نباشند ، وتری که به مرکز نزدیکتر است ، بزرگتر است .

فرض : $\left\{ \begin{array}{l} OH \perp AB \text{ و } OK \perp CD \text{ و} \\ OH<OK \end{array} \right.$ (شکل ۱۸) .



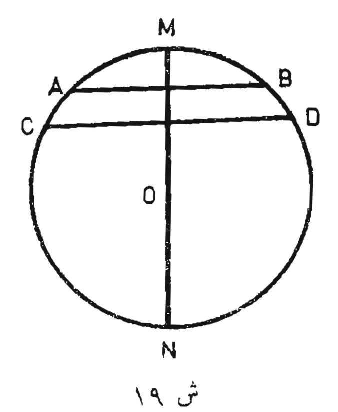
ش ۱۸

حکم : $AB > CD$.

برهان - اگر AB بزرگتر از CD نباشد ، یا $AB = CD$ است ، دراین صورت $OH = OK$ می‌شود و این خلاف فرض است .

یا $AB < CD$ است ، دراین صورت $OH > OK$ می‌شود و این نیز خلاف فرض است . پس بناچار $AB > CD$ است .

۱۳- قضیه - در هر دایره ، قوسهای محدود بین دو وتر متوازی ، متساویند .



ش ۱۹

فرض : $AB \parallel CD$ (شکل۱۹).

حکم : $\widehat{AC} = \widehat{BD}$.

برهان - از O عمودی بر وترها رسم می‌کنیم تادایره را در M قطع کند . می‌دانیم که :

$$\widehat{MC} = \widehat{MD}$$

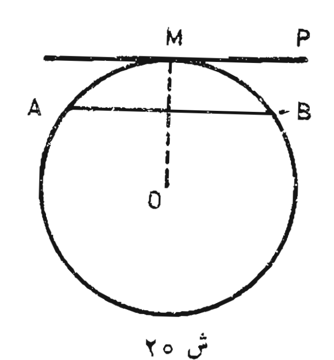
و $$\widehat{MA} = \widehat{MB}$$

یا پس‌ازتفریق دوطرف از یکدیگر :

$$\widehat{MC} - \widehat{MA} = \widehat{MD} - \widehat{MB}$$

یعنی : $\widehat{AC} = \widehat{BD}$

۱۴- نتیجه - اگر خطی موازی با یك وتر و مماس بر دایره باشد ، قوسهایی از دایره که بین نقطهٔ تماس و وتر محصورند ، متساویند .



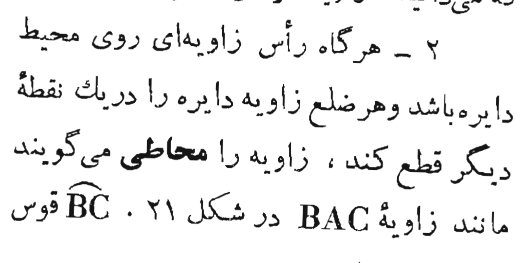
ش ۲۰

زیرا OM که برمماس MP عمود است (شکل۲۰) ، بر موازی آن، AB ، هم عمود است ؛ پس : $\widehat{MA} = \widehat{MB}$

دایره و زاویه

۱۵ - دایره و زاویه - هرگاه اضلاع زاویه‌ای با دایره‌ای نقاط مشترکی داشته باشند ، برای زاویه چند وضع مختلف در نظر گرفته می‌شود .

۱- اگر رأس زاویه در مرکز دایره باشد ، زاویه را ، همانطور که می‌دانید ، زاویهٔ **مرکزی** می‌نامند .



ش ۲۱

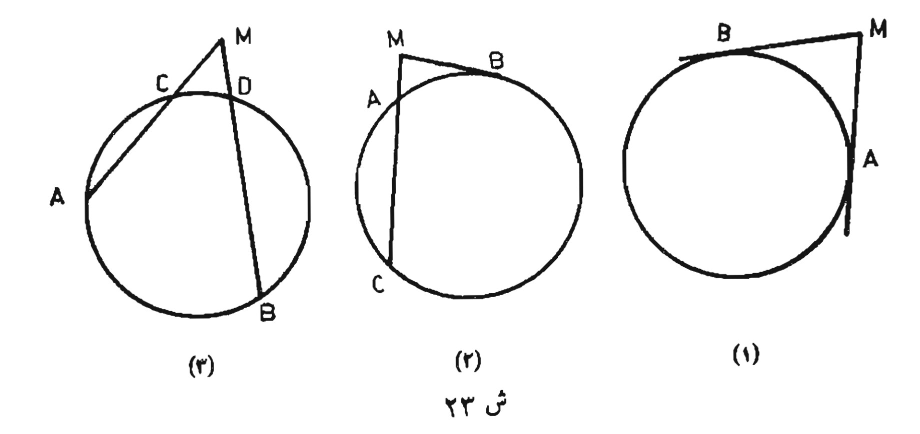
۲ - هرگاه رأس زاویه‌ای روی محیط دایره‌باشد وهرضلع زاویه دایره را دریك نقطهٔ دیگر قطع کند ، زاویه را **محاطی** می‌گویند مانند زاویهٔ BAC در شکل ۲۱ . قوس $\widehat{BC}$ مقابل زاویه است .

۳- هرگاه رأس زاویه‌ای روی دایره باشد ویکی از اضلاع‌آن بر دایره مماس بوده دیگری آن را در نقطه‌ای مانند A قطع کند ، آن زاویه را **ظلی** می‌گویند (شکل ۲۲) .

قوس MA ، واقع مابین دوضلع زاویه و محدود به رأس زاویه ونقطهٔ تقاطع ضلع آن با دایره ، را قوس مقابل زاویه می‌نامند .

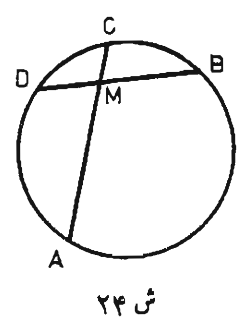
ش ۲۲

۴ - هرگاه رأس زاویه خارج دایره باشد و دو ضلعش دایره را قطع کنند ، یا یکی از آنها ، یا هر دو ، بر دایره مماس باشند (شکل۲۳) ، زاویه را **خارجی** می‌گویند وهردوقوس دایره ، محدود بین اضلاع زاویه ، را قوسهای مقابل زاویه می‌نامند .



ش ۲۳

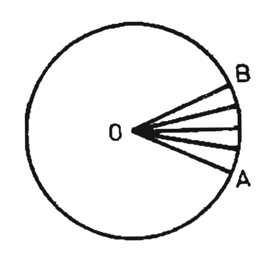
۵- هرگاه رأس زاویه داخل دایره باشد (شکل ۲۴) ، زاویه را **داخلی** می‌گویند ودوقوس دایره محدود بین اضلاع زاویه و امتداد آنها را قوسهای مقابل آن زاویه می‌نامند .



ش ۲۴

۱۶- قضیه - اندازهٔ زاویهٔ مرکزی برحسب درجهٔ زاویه واندازهٔ قوس مقابل آن برحسب درجهٔ قوس ، بایك عدد بیان می‌شود .

درحقیقت اگرزاویهٔ AOB را به m قسمت متساوی تقسیم‌کنیم ، قوس مقابل‌آن نیز به mقسمت متساوی تقسیم می‌شود (شکل ۲۵) .



ش ۲۵

گاهی نیزگفته می‌شود :

اندازهٔ زاویهٔ مرکزی برابر اندازهٔ قوس مقابل آن است .

اگراین اصطلاح را بکار می‌برید به

این توجه داشته باشید که درفکر شما واحدهای زاویه وقوس از هم جدا هستند .

۱۷ - زاویهٔ محاطی - قضیه - اندازهٔ زاویهٔ محاطی نصف اندازهٔ قوس مقابل آن است .

برهان - الف - نخست فرض می‌کنیم که یك ضلع زاویهٔ محاطی بر مرکز دایره‌گذشته باشد (شکل ۲۶) . از O به C وصل می‌کنیم :

در مثلث متساوی‌الساقین AOC اندازهٔ زاویهٔ خارجی BOC را x می‌نامیم ؛ بدیهی است‌که اندازهٔ قوس BC نیز x است .

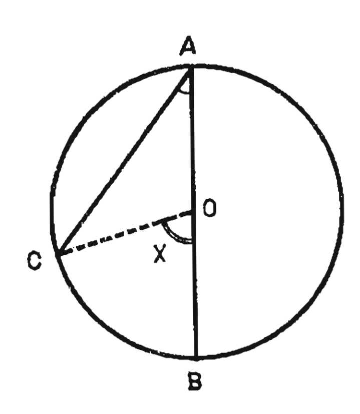
اما $\widehat{BOC}=\hat{A}+\hat{C}=۲\hat{A}$

یا $\hat{A}=\frac{۱}{۲}\widehat{BOC}$

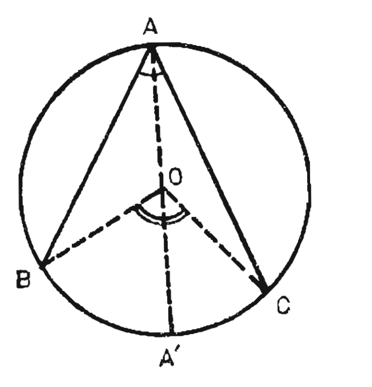
وازآنجا اندازهٔ $\hat{A}=\frac{۱}{۲}x$

وچون اندازهٔ $\widehat{BC}$ مساوی x است :

اندازهٔ $\hat{A}=\frac{۱}{۲}$ (اندازهٔ $\widehat{BC}$)



ش ۲۶



ش ۲۷

ب ـ اگر اضلاع زاویهٔ محاطی از دو طرف مرکز دایره بگذرند (شکل ۲۷) ، ملاحظه می‌کنیم که قطری از دایره که بر A ، رأس زاویهٔ BAC ، می‌گذرد ، این زاویه را به دو زاویهٔ BAA' و CAA' از نوع قسمت الف تقسیم می‌کند ؛ با توجه به‌این معنی ، می‌گوییم :

اندازهٔ $\widehat{BAA'} = \frac{1}{2}$ (اندازهٔ $\overset{\frown}{A'B}$)

و اندازهٔ $\widehat{CAA'} = \frac{1}{2}$ (اندازهٔ $\overset{\frown}{A'C}$)

دو رابطه را با هم جمع می‌کنیم :

اندازهٔ $\widehat{BAA'} +$ اندازهٔ $\widehat{CAA'} = \frac{1}{2}$ (اندازهٔ $\overset{\frown}{A'B} +$ اندازهٔ $\overset{\frown}{A'C}$)

یا : اندازهٔ $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}$ (اندازهٔ $\overset{\frown}{BC}$)

ج ـ هرگاه دو ضلع زاویهٔ محاطی در یك طرف مرکز دایره باشند (شکل ۲۸) ، باز قطر AA' را رسم کرده مانند قسمت ب استدلال می‌کنیم :

ش ۲۸

$$\widehat{BAC} = \widehat{A'AB} - \widehat{A'AC}$$

اندازهٔ $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}$ (اندازهٔ $\overset{\frown}{A'B} -$ اندازهٔ $\overset{\frown}{A'C}$) $= \frac{1}{2}$ (اندازهٔ $\overset{\frown}{BC}$)

۱۸ـ نتیجه ـ زوایای محاطی مقابل به یك قوس ، متساویند .

۱۹ـ نتیجه ـ زاویهٔ محاط در نیمدایره قائمه است .

۲۰ـ قضیه ـ اندازهٔ زاویهٔ ظلی، نصف اندازهٔ کمان روبروی آن است .

برهان ـ از B وتری موازی بامماس AX می‌کشیم تا دایره را در

C قطع کند (شکل ۲۹) .

ش ۲۹

می‌دانیم که : $\widehat{XAB} = \widehat{ABC}$ (متبادل داخلی نسبت به دومتوازی AX و BC و مورب AB) .

و اندازهٔ $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}$ (اندازهٔ $\overset{\frown}{AC}$)

وچون $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB}$ ،

اندازهٔ $\widehat{XAB} = \frac{1}{2}$ (اندازهٔ $\overset{\frown}{AB}$)

۲۱ ـ زاویهٔ داخلی ـ قضیه ـ اندازهٔ زاویهٔ داخلی مساوی است با نصف مجموع اندازه‌های دو قوس مقابل آن .

زاویهٔ داخلی ANB وکمانهای AB و $A'B'$ مقابل به‌آن را درنظر می‌گیریم (شکل ۳۰) . از A به B' وصل می‌کنیم:

ش ۳۰

در مثلث $AB'N$:

$$\widehat{ANB} = \widehat{NAB'} + \widehat{NB'A}$$

اما اندازهٔ $\widehat{NAB'} = \frac{1}{2}$ (اندازهٔ $\overset{\frown}{A'B'}$)

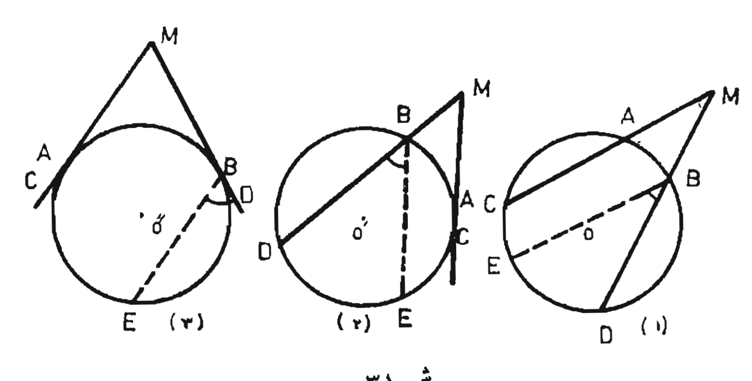
و اندازهٔ $\widehat{NB'A} = \frac{1}{2}$ (اندازهٔ $\overset{\frown}{AB}$)

پس : اندازهٔ $\widehat{ANB} = \frac{1}{2}$ (اندازهٔ $\overset{\frown}{A'B'}$) $+ \frac{1}{2}$ (اندازهٔ $\overset{\frown}{AB}$)

$= \dfrac{\text{اندازهٔ } \overset{\frown}{AB} + \text{اندازهٔ } \overset{\frown}{A'B'}}{2}$

۲۲ ـ قضیه ـ اندازهٔ زاویهٔ خارجی ، نصف تفاضل اندازه‌های دو قوس مقابل آن است .

ممکن است اضلاع زاویه دایره را قطع کنند (شکل ۳۱ ـ ۱) ،



ش ۳۱

یا یکی از آنها دایره را قطع کند ودیگری مماس باشد (شکل ۳۱ـ۲)، یا هر دو بر دایره مماس باشند (شکل ۳۱ ـ ۳) . از B خطی موازی باضلع دیگر زاویه می‌کشیم تا دایره را در E قطع کند و با BD زاویه‌ای مساوی AMB بوجود آورد .

اندازهٔ زاویهٔ محاطی B (یا در شکل ۳۱ـ۳ ، زاویهٔ ظلی B) نصف اندازهٔ قوس مقابل آن است ، پس :

$$\widehat{AMB}=\widehat{EBD}=\frac{1}{2}\widehat{DE}$$

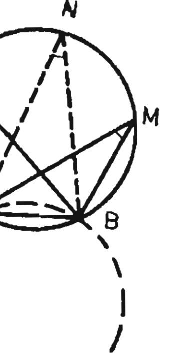
اما
$$\widehat{DE}=\widehat{DC}-\widehat{EC}$$

و
$$\widehat{EC}=\widehat{AB}$$

بنابراین
$$\widehat{DE}=\widehat{DC}-\widehat{AB}$$

ودرنتیجه
$$\widehat{AMB}=\frac{1}{2}(\widehat{DC}-\widehat{AB})$$

۲۳ـ هرگاه زاویهٔ AMB برابر α باشد و دایرهٔ محیطی مثلث AMB را رسم کنیم ، $\widehat{AB}$ مساوی ۲α است (شکل ۳۲) .



ش ۳۲

هر نقطه مانند N از قوس AMB را که به A و B وصل کنیم ، زاویهٔ بین دوخط واصل مساوی α خواهدبود .

$$\widehat{ANB}=\frac{1}{2}\widehat{AB}=\alpha$$

رأس هر زاویهٔ α که اضلاعش بر A و B بگذرند و با $\widehat{AMB}$ دریک‌طرف AB باشند ، بر روی قوس AMB قرار دارد .

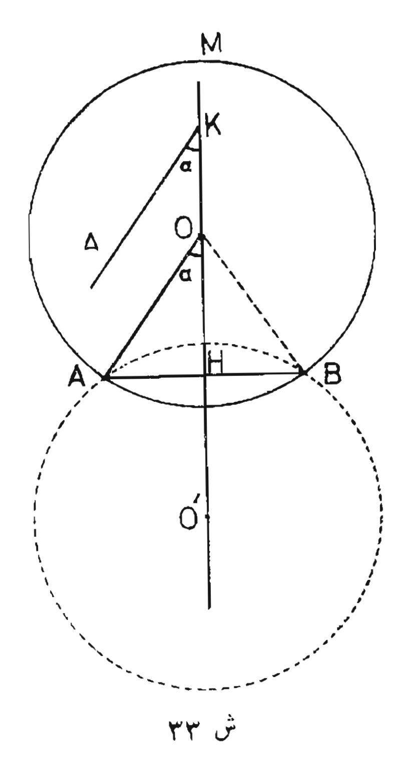
در حقیقت اگر فرض‌کنیم‌که $\widehat{APB}=\alpha$ و P روی دایره نباشد ، یك ضلع زاویه ، مثلاً PB ، قوس AMB را در P' قطع می‌کند و : $\widehat{AP'B}=\frac{1}{2}\widehat{AB}=\alpha$

پس $\widehat{AP'B}$ و $\widehat{APB}$ برابر یکدیگرند و لازم می‌آید که AP بر AP' منطبق شود وP بر روی P' ، یعنی روی دایره ، قرارگیرد .

بنابرآنچه گفته شد ، **قوس AMB مکان‌هندسی رئوس‌زوایای مساوی α است که اضلاعشان بر A و B بگذرند** . این مکان از دو قوس دو دایرهٔ متساوی تشکیل می‌شودکه در دو طرف AB رسم شده‌اند .

تعریف ـ قوس AMB را **قوس‌حاوی زاویهٔ α** ، یا به اصطلاح دیگر **کمان درخور زاویهٔ α** می‌نامند که بر A و B می‌گذرد .

۲۴ ـ رسم قوس‌حاوی زاویهٔ α ـ هرگاه بخواهیم که قوس حاوی α را بر دونقطهٔ مفروض A و B بگذرانیم (شکل ۳۳) ، عمود‌منصف AB را رسم می‌کنیم و از یك نقطهٔ اختیاری K واقع بر عمود‌منصف خطی مانند Δ می‌کشیم که با KH زاویهٔ α بسازد . از A خطی به‌موازات Δ مرور می‌دهیم تا عمود منصف ، یعنی KH ، را در O قطع



ش ۳۳

کند. بدیهی است که $\widehat{AOH}$ مساوی α است . اگر به مرکز O و به شعاع OA دایره‌ای بزنیم، اولاً این دایره بر B می‌گذرد (مرکزش روی عمود منصف است) ، ثانیاً زاویهٔ مرکزی AOB ، ودر نتیجه قوس AB ، مساوی 2α می‌شود .

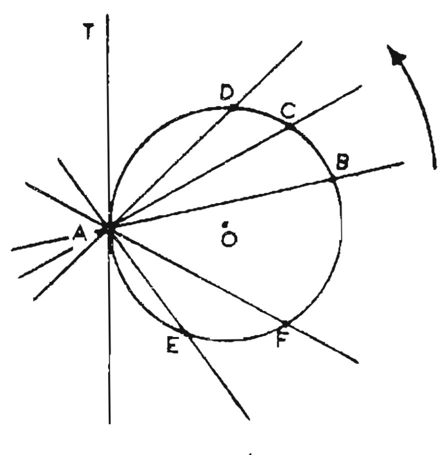
قوس AMB درخور زاویهٔ α است زیرا که از هر نقطهٔ آن که به A و B وصل کنیم ، زاویهٔ محاطی مقابل به کمان 2α بوجود می‌آید . قوس دیگر از دایرهٔ مرسوم که در طرف دیگر پاره‌خط AB است درخور زاویهٔ مکمل α خواهد بود . نقطهٔ O' قرینهٔ O نسبت به AB مرکز دایره‌ای مساوی با دایرهٔ مرسوم است که جزء دیگر مکان ، یعنی قوس دیگر حاوی α ، را تشکیل می‌دهد .

۲۵- خط مماس بر یك منحنی غیرمشخص - دیدید که (شمارهٔ ۳ ، همین فصل ، حالت دوم) **خط مماس** بر دایره خطی است که فاصلهٔ مرکز دایره از آن خط ، برابر با شعاع دایره است و موقع عمود مرسوم از مرکز دایره برخط مماس را که تنها نقطهٔ مشترك بین خط و دایره است ، **نقطهٔ تماس** خط و دایره می‌نامند .

اما خط مماس بر دایره را ، نیز می‌توان **وضع حد قاطعی دانست که**

در حول یکی از دو نقطهٔ تقاطعش با دایره آنقدر دوران کند که دو نقطهٔ تقاطع برهم منطبق شوند .

برای توضیح ، دایرهٔ O (شکل ۳۴) و خط قاطعی را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که A و B دو نقطهٔ تقاطع خط قاطع با دایرهٔ O باشد .

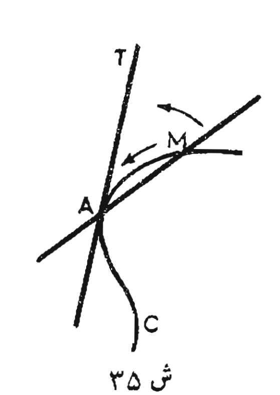


ش ۳۴

اگر نقطهٔ A را ثابت نگاه بداریم وخط قاطع را در حول نقطهٔ A ودر جهت سهم دوران دهیم ، این قاطع متوالیاً اوضاعی مانند AC و AD و .... را اختیار می‌کند ودومین نقطهٔ تقاطعش با دایره ، یعنی B و C و D و...، تدریجاً به نقطهٔ A نزدیك می‌شود . اگر عمل دوران قاطع را ادامه دهیم، این قاطع متدرجاً اوضاعی مانند AE و AF و ..... به خود خواهد گرفت وبه این ترتیب ، دومین نقطهٔ تقاطعش با دایره که به وضع E و F و..... درآمده ، از A دورخواهد شد ؛ بنابراین ، لازم می‌آید که این نقطه در لحظه‌ای به نقطهٔ A رسیده باشد ؛ درهمین لحظه است که خط ، بیش از یك نقطهٔ مشترك با دایره نخواهد داشت ، یعنی بر دایره مماس است .

به همین ترتیب ، خط مماس بر یك منحنی غیر مشخص مانند C (شکل ۳۵) در نقطه‌ای مانند A از این منحنی را می‌توان وضع حدّ

قاطعی مانند AM دانست وقتی‌که این قاطع در حول نقطهٔ A آنقدر دوران کند که نقطهٔ M بینهایت به نقطهٔ A نزدیك وبالاخره بر آن منطبق شود یعنی‌خط قاطع به وضعی مانند AT درآید .



ش ۳۵

نقطهٔ A را **نقطهٔ تماس** خط AT با منحنی C یا نقطهٔ تماس منحنی C با خط AT می‌گویند .

توجه کنید ! مماس بودن یك خط بر یك منحنی ، مانع از آن نخواهد بود که خط مماس ومنحنی درنقطه یا نقاط دیگری ، متمایز از نقطهٔ تماس ، یکدیگررا قطع کنند . به‌بیان دیگر ، ممکن است خطی بر یك منحنی درنقطه‌ای مماس باشد ودرنقطه یا نقاط دیگری ، غیر از نقطهٔ تماس ، آن منحنی را قطع کند .

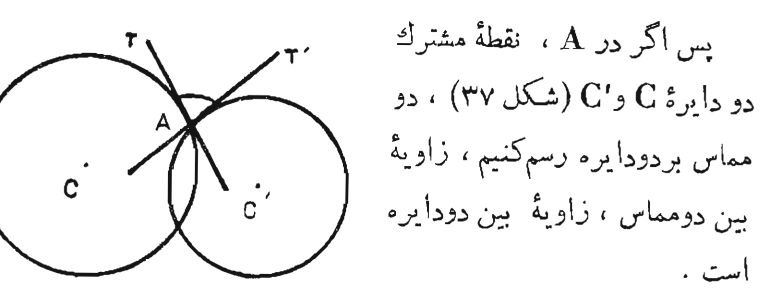
۳۶- زاویهٔ بین دو منحنی -

هرگاه دو منحنی ، مانند C و C′ در شکل ۳۶ ، یکدیگر را در نقطهٔ A قطع کنند ودر این نقطه مماسهای AT و AT′ را بر آنها رسم‌کنیم، زاویهٔ TAT′ را زاویهٔ بین دو منحنی در نقطهٔ تقاطع A می‌نامند .

ش ۳۶

زاویهٔ بین دو منحنی در یکی ازنقاط تقاطع‌آنها زاویهٔ بین مماسهای بر دو منحنی درآن نقطه است .

پس اگر در A ، نقطهٔ مشترك دو دایرهٔ C و C′ (شکل ۳۷) ، دو مماس بردودایره رسم‌کنیم ، زاویهٔ بین دومماس ، زاویهٔ بین دودایره است .



ش ۳۷

هرگاه دو مماس بر هم عمود باشند ، دو دایره را برهم **عمود**گوییم .

۳۷ - قضیه - در دو دایرهٔ عمود برهم ، شعاع نقطهٔ تقاطع ازهریك ، بردیگری مماس است .

درحقیقت چون دودایره برهم عمودند (شکل ۳۸) ، AT′ بر مماس AT عمود است و نیزشعاع OA بر مماس AT عمود است ؛ و چون از یك نقطه ، مانند A ، نمی‌توان بیش‌از یك عمود برخطی مانندAT رسم‌کرد، OAبرامتداد AT′ است . به همین راه می‌شود ثابت کرد که O′A بر امتداد AT واقع است .

ش ۳۸

۲۸ - زاویهٔ بین‌خط و دایره -

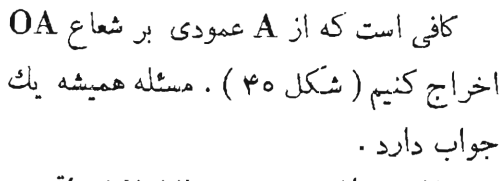
زاویهٔ بین‌خط Δ و دایرهٔ O (شکل۳۹)، عبارت است اززاویهٔ بین‌خط Δ بامماسی که در یکی از نقطه‌های تقاطع خط و دایره رسم شود . بآسانی‌می‌توان

ش ۳۹

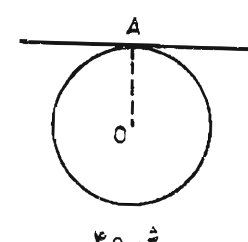
فهمیدکه اگرخطی بر مرکز دایره بگذرد ، زاویه‌اش با دایره یك قائمه است . یا به عبارت دیگر، **خطی که‌از مرکزدایره بگذرد ، بردایره‌عموداست.**

رسم مماس بر دایره

۲۹- مسئله - می‌خواهیم در نقطهٔ A واقع بر دایره ، خطی بر آن مماس کنیم .



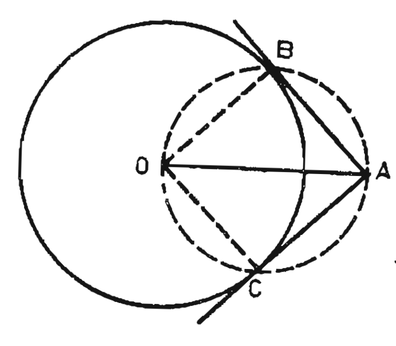
کافی است که از A عمودی بر شعاع OA اخراج کنیم (شکل ۴۰) . مسئله همیشه یك جواب دارد .



ش ۴۰

۳۰- مسئله - می‌خواهیم از نقطهٔ A واقع در خارج دایره ، خطی بر آن مماس‌کنیم (شکل۴۱).

به قطر OA دایره‌ای می‌کشیم تا دایرهٔ مفروض را در B و C قطع کند . AB و AC را رسم می‌کنیم . این دو خط بر دایره مماس هستند، زیرا که چون $\widehat{OBA}$ محاط در نیمدایره است ، AB برشعاع OB عموداست، یعنی AB بر دایرهٔ O مماس است .



ش ۴۱

چون دایره‌ای که به قطر OA رسم کنیم همیشه دایرهٔ O را در دونقطه قطع می‌کند ، مسئله همیشه دوجواب دارد، یعنی **ازهر نقطهٔ خارج دایره‌ای همیشه می‌توان دو مماس بر آن دایره رسم کرد .**

۳۱- تعریف - هرگاه از نقطهٔ M مماسی بر دایره رسم‌کنیم و A نقطهٔ تماس باشد،اندازهٔ قطعهٔ MA محدود بین نقطهٔ M و نقطهٔ تماس را

طول‌مماس می‌گویند (شکل ۴۲) .

اگر از M دو مماس MA و MB را بر دایره بکشیم و M را به مرکز دایره وصل کرده و شعاعهای نقاط تماس را نیز رسم کنیم، دومثلث قائم‌الزاویهٔ OAM و OBM (به‌حالت وتر‌و‌یك ضلع) متساویند ودرنتیجه : $MA = MB$ و $\widehat{AMO}=\widehat{BMO}$. بنابراین :

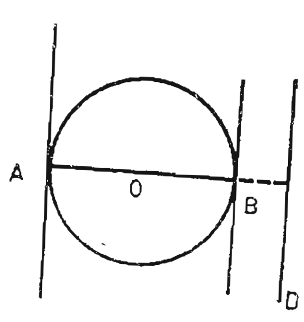
ش ۴۲

اولاً - مماسهایی که از یك نقطه بردایره‌ای رسم شوند متساویند .

ثانیاً - خطی که نقطهٔ تقاطع دو مماس را به مرکز دایره وصل کند ، نیمساز زاویهٔ بین دو مماس است .

۳۲- مسئله - بر دایره‌ای مماسی به‌موازات امتداد معینی رسم‌کنید .

حل - از O ، مرکزدایره، عمودی برامتداد D فرود می‌آوریم (شکل ۴۳) تا دایره را در A و B قطع‌کند ؛ از A و B دوخط‌موازی با D می‌کشیم؛این‌دوخط،مماسهای مطلوب هستند و مسئله همیشه دو جواب دارد .

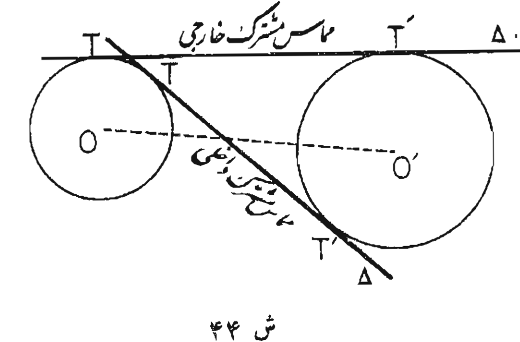


ش ۴۳

مماس‌مشترك دو دایره

۳۳- خطی‌مانند Δ (شکل۴۴)که بر دو دایرهٔ O و O' مماس‌باشد، **مماس‌مشترك** آنهاست . اندازهٔ قطعه‌خط TT' محدود بین دونقطهٔ تماس

۵۰.

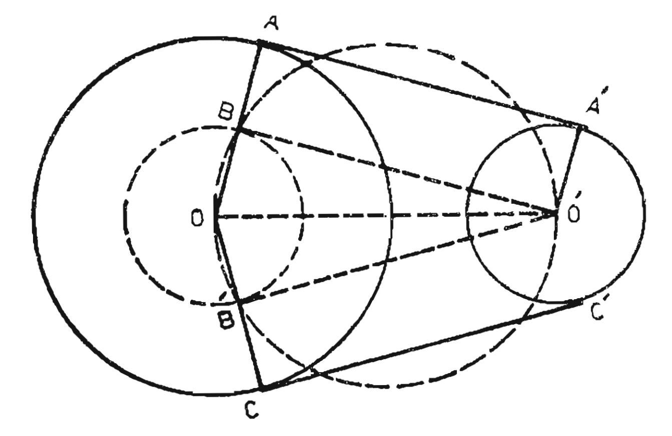


ش ۴۴

را طول مماس مشترک گویند. هرگاه دو دایره در یک طرف مماس مشترک باشند، **مماس‌مشترک خارجی** است واگر دو دایره در دو طرف مماس مشترک باشند، **مماس مشترک داخلی** است .

۳۴- مسئله - رسم مماس‌مشترک خارجی دو دایرهٔ O و O' (شکل ۴۵) .

شعاع دایرهٔ بزرگتررا R وشعاع دایرهٔ کوچکتر را R' می‌نامیم . فرض می‌کنیم‌که مسئله حل شده باشد وخط AA' مماس مشترک خارجی



ش ۴۵

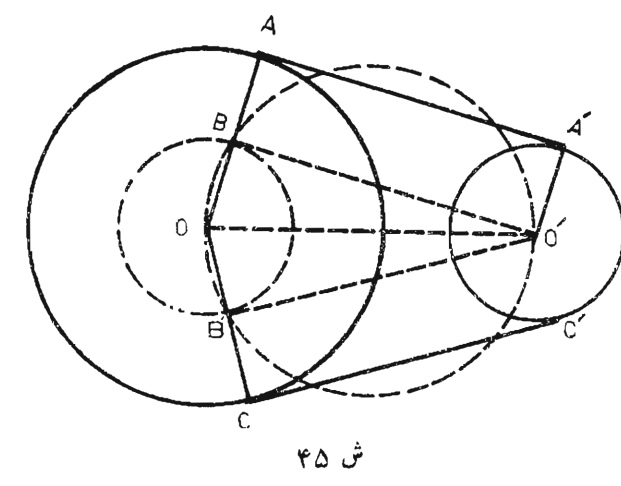
دودایره ونقاط A و A' نقطه‌های تماس باشند . بدیهی‌است OA وO'A' هردو بر AA' عمود هستند و در نتیجه با یکدیگرموازیند .

اگر از O' ، مرکز دایرهٔ کوچکتر ، خطی موازی با AA' رسم کنیم تا شعاع OA را در B قطع کند ، چهارضلعی O'A'AB مربع‌مستطیل است و OBO' مثلثی است قائم‌الزاویه‌که ضلع OB از آن مساوی تفاضل شعاعهای دو دایره است :

$$OB=OA-AB=OA-O'A'=R-R'$$

از طرفی B ، رأس زاویهٔ قائمهٔ OBO' ، واقع است بر روی دایره‌ای به‌قطر OO' ، یعنی B محل تقاطع دایرهٔ به قطر OO' است با دایره‌ای به مرکز O وشعاع (R − R') .

پس راه حل مسئله به این ترتیب بدست می‌آید :



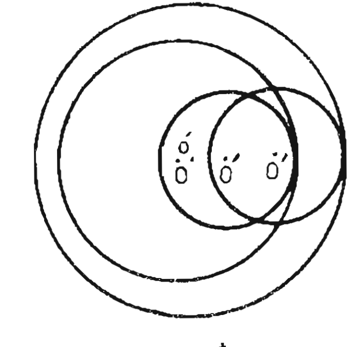
ش ۴۵

الف - به مرکز دایرهٔ بزرگتر O ، و با شعاعی مساوی تفاضل شعاعهای دو دایرهٔ مفروض ، دایره‌ای می‌زنیم تا دایره‌ای را که قطرش OO' (خط‌المرکزین دو دایرهٔ مفروض) باشد ، در B و B' قطع کند .

ب - از O به B و B' وصل کرده امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ O را در A و C قطع کنند .

ج - خطی که از A به‌موازات BO' یا از C به‌موازات $B'O'$ رسم شود ، مماس مشترك خارجی دو دایره است .

برای آنکه مسئله‌جواب داشته‌باشد ، باید دایرهٔ به مرکز O و شعاع $R-R'$ دایرهٔ به قطر OO' را قطع کند ، یعنی باید شعاعش از OO' بزرگتر نباشد وگرنه نقطهٔ O' در داخل آن واقع خواهد شد . پس اگر $OO'>R-R'$ باشد، (یعنی اگردو دایرهٔ O و O' متخارج یا متقاطع یا مماس‌خارج باشند) مسئله دوجواب دارد ، اما اگر $OO'=R-R'$ باشد دایرهٔ به مرکز O و به شعاع $R-R'$ با دایرهٔ به قطر OO' مماس می‌شود (شکل ۴۶) و فقط يك نقطهٔ مشترك پیدا می‌کنند و مسئله‌فقط‌يك‌جواب دارد. بالاخره اگر $OO'<R-R'$ باشد ،یعنی دو دایره متداخل باشند ، مسئله جواب ندارد .

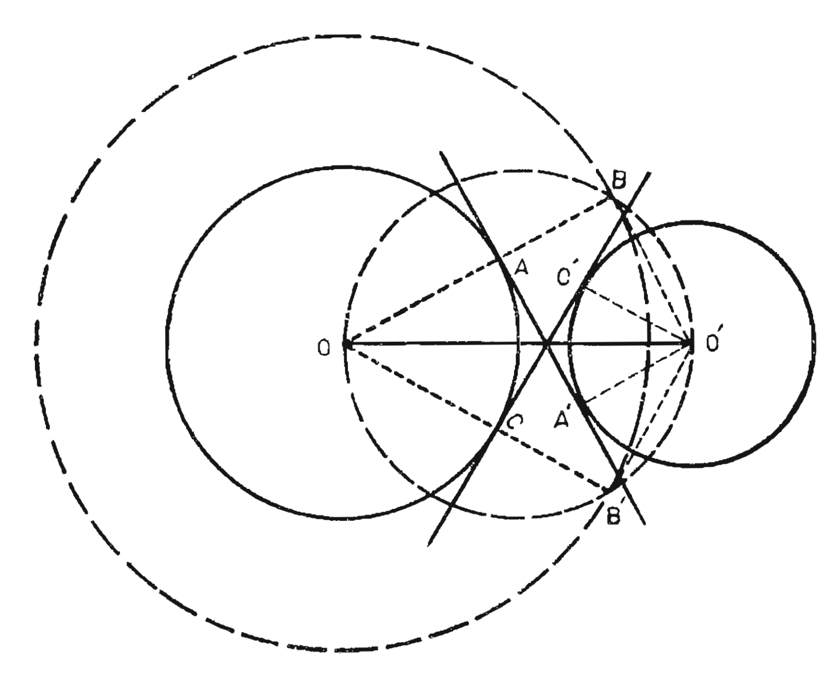


ش ۴۶

۳۵- مسئله - مطلوب است رسم مماس مشترك داخلی دو دایرهٔ O و O' (شکل ۴۷) .

مانند مسئلهٔ پیش ، آن را حل شده انگاشته فرض می‌کنیم که AA' مماس مشترك داخلی دو دایره باشد . اگر از O' خطی موازی با AA' بکشیم ، تا امتداد OA را در B قطع کند ، $BA=O'A'=R'$ است . از طرفی $OB=OA+AB=R+R'$ و $\hat{B}=۹۰^\circ$ ، پس B واقع است هم بر روی دایره‌ای به قطر OO' و هم بر روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع $R+R'$.

بنابراین راه حل مسئله پیدا می‌شود ، بدین شرح :



ش ۴۷

الف - به قطر OO' دایره‌ای می‌زنیم تا دایرهٔ به مرکز O وشعاع $R+R'$ را در B و B' قطع کند .

ب - OB و OB' دایرهٔ O را در A و C قطع می‌کنند . از A و C خطهایی به‌موازات BO' و $B'O'$ می‌کشیم . این خطها مماسهای مطلوبند .

شرط وجود جواب آن است‌که دایرهٔبه مرکز O وشعاع $R+R'$ دایرهٔ به قطر OO' را قطع کند . برای این کار باید $R+R'<OO'$ باشد ، یعنی دو دایرهٔ O و O' متخارج باشند و در این صورت ، مسئله

دارای دوجواب است . درحالت $OO'=R+R'$ ، یعنی‌وقتی‌که دایره‌های O و O' مماس خارج باشند ، خطی که درنقطهٔ تماس آنها بر آنها مماس‌است ، مماس مشترك داخلی‌آنهاست . دراین حالت مسئله فقط یك جواب دارد .

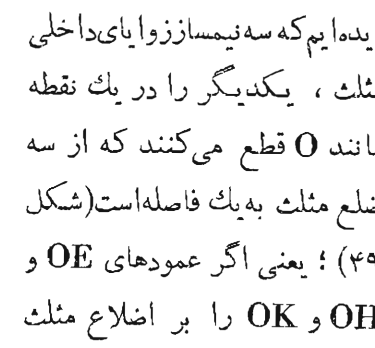
بطور خلاصه تعداد مماسهای مشترك (خارجی و داخلی) دو دایره برحسب وضع آنها نسبت به‌یکدیگر دراین جدول نموده می‌شود :

وضع دو دایره	تعداد مماس‌های مشترك خارجی	تعدادمماس‌های مشترك داخلی	جمع تعداد مماسهای مشترك
متخارج	۲	۲	۴
مماس خارج	۲	۱	۳
متقاطع	۲	-	۲
مماس داخل	۱	-	۱
متداخل	-	-	۰

دایره‌های محیطی و محاطی مثلث

۳۶- دایرهٔ محیطی - می‌دانیم‌که سه عمود منصف اضلاع مثلث ، بر یك نقطه مانند O می‌گذرند که از سه رأس مثلث به یك فاصله است (شکل ۴۸) . پس اگر به مرکز O و شعاع مثلاً OA دایره‌ای رسم کنیم ، این دایره بر دو رأس دیگر مثلث نیزمرورخواهدکرد . دایره‌ای را که رئوس مثلث بر آن قرار دارند و مثلث در درون آن واقع است **دایرهٔ‌محیطی** مثلث گویند . **مرکز دایرهٔ محیطی مثلث، نقطهٔ تقاطع عمود‌منصفهای اضلاع آن است .**

۳۷- دایرهٔ محاطی داخلی - دیده‌ایم‌که سه‌نیمساززوایای‌داخلی مثلث ، یکدیگر را در یك نقطه مانند O قطع می‌کنند که از سه ضلع مثلث به‌یك فاصله‌است(شکل ۴۹) ؛ یعنی اگر عمودهای OE و OH و OK را بر اضلاع مثلث فرود آوریم :

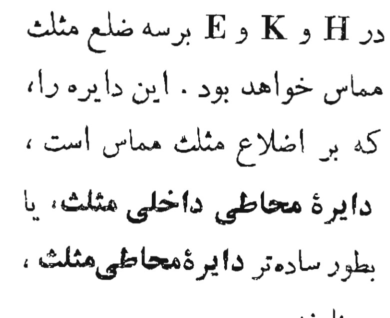


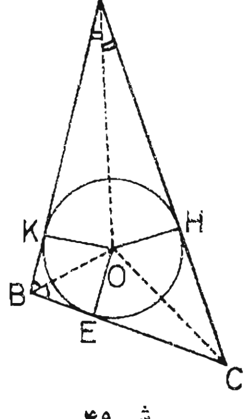

ش ۴۸

$$OE=OK=OH$$

پس اگر دایره‌ای به مرکز O وشعاع OH رسم‌کنیم، این دایره در H و K و E برسه ضلع مثلث مماس خواهد بود . این دایره را، که بر اضلاع مثلث مماس است ، **دایرهٔ محاطی داخلی مثلث**، یا بطور ساده‌تر **دایرهٔ‌محاطی‌مثلث** ، می‌نامند .

مرکز دایرهٔ محاطی‌داخلی مثلث ، نقطهٔ تلاقی نیمسازهای زوایای داخلی آن است .





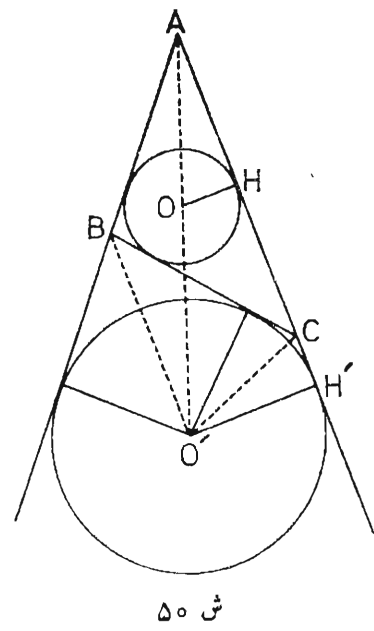
ش ۴۹

۳۸ - دایره‌های محاطی خارجی - باز هم در شماره های قبل دیده‌ایم که در مثلث ، نیمساز هر زاویهٔ داخلی مانند $\hat{A}$ و نیمسازهای دو زاویهٔ خارجی غیر مجاور آن یکدیگر را در نقطه‌ای مانند O' قطع می‌کنند (شکل ۵۰) که از ضلع a و امتداد دو ضلع دیگر به یك فاصله

است ، یعنی عمودهایی که از O' بر اضلاع مثلث فرود آوریم ، باهم برابرند .

پس اگر دایره‌ای به مرکز O' وشعاع $O'H'$ رسم‌کنیم ، بر ضلع BC وبرامتداد اضلاع AC و AB مماس‌خواهدبود . این دایره را،که‌بریك ضلع a و امتداد دوضلع مماس است ، **دایرهٔ محاطی خارجی‌مماس بر ضلع a یا دایرهٔ‌محاطی‌خارجی زاویهٔ A** می‌نامیم .

دایره‌های محاطی‌خارجی زاویه‌های B و C را به‌همین ترتیب می‌توان رسم کرد .



ش ۵۰

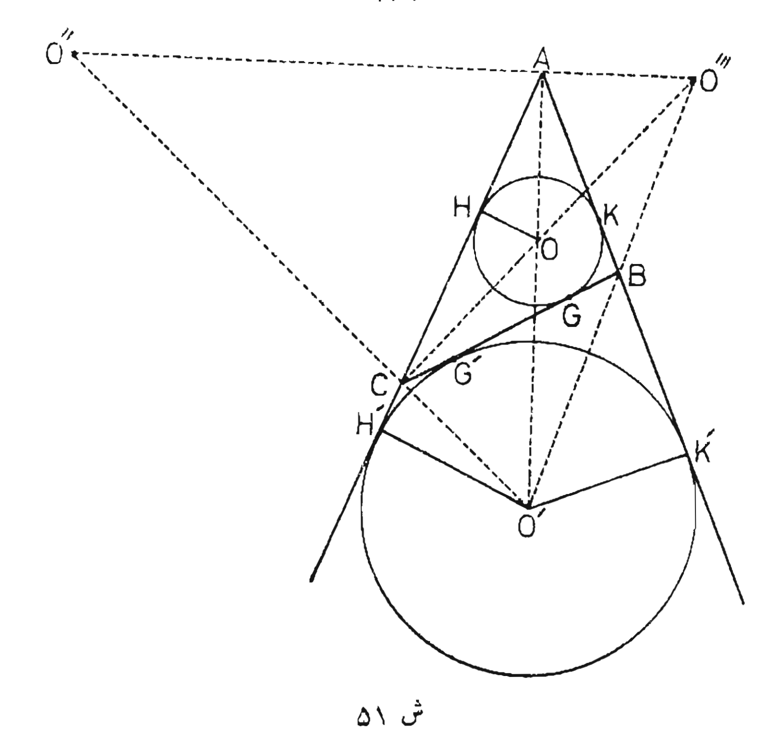
هر مثلث سه‌دایرهٔ‌محاطی‌خارجی دارد.مرکزدایرهٔ‌محاطی‌خارجی هر زاویهٔ مثلث ، نقطهٔ تقاطع نیمساز آن زاویه است با نیمسازهای دوزاویهٔ خارجی غیر مجاور آن . در شکل ۵۱ ، مرکزهای دایرهٔ محاطی داخلی و هرسه دایرهٔ محاطی خارجی بدست آمده‌اند .

۳۹ ـ مسئله ـ قطعاتی ازاضلاع مثلث محصوربین رئوس و دایره‌های محاطی داخلی وخارجی را حساب کنید .

الف ـ دایرهٔ محاطی داخلی ـ در شکل ۵۱ :

$$AH=AK \quad \text{و} \quad BG=BK \quad \text{و} \quad CG=CH$$

پس چون محیط مثلث را به $2p$ نمایش دهیم :



ش ۵۱

$$CG+GB+AK=p \quad \text{یا} \quad AK=p-a$$

به‌همین نحوثابت می‌شودکه :

$$BK=p-b \quad \text{و} \quad CH=p-c$$

یعنی : قطعهٔ محصوربین هررأس ونقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی‌داخلی برابر است با فزونی نصف محیط برضلع مقابل‌آن رأس .

ب ـ دایرهٔ محاطی خارجی ضلع a ـ در شکل ۵۱ :

$$AH'=AK' \text{ ، } BG'=BK' \text{ ، } CG'=CH'$$

$$AC+CG'+BG'+AB=2p$$

یعنی : $AH'+AK'=2p$

بنابراین : $AH'=AK'=p$

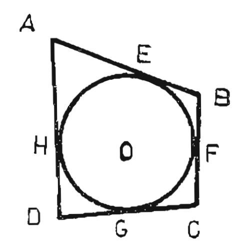
$$BG'=BK'=AK'-AB=p-c$$
$$CG'=CH'=AH'-AC=p-b$$

چهارضلعیهای محیطی و محاطی :

۴۰ ـ تعریف ـ یك چندضلعی‌را محیط بر دایره‌گویند هرگاه دایره برهمهٔ اضلاع آن مماس باشد ؛ در این صورت دایره **در چندضلعی محاط است ؛ و چندضلعی را محاط دردایره‌گویند وقتی‌که دایره بر تمام رئوس‌آن بگذرد؛** در این صورت دایره بر **چندضلعی محیط** است .

۴۱ ـ قضیه ـ در هر چهارضلعی محیطی ، مجموع هردوضلع متقابل مساوی است با مجموع دو ضلع دیگر .

برهان ـ اگر نقاط تماس اضلاع را با دایره (شکل ۵۲) E و F و G و H بنامیم ، چون دو مماسی که از یك نقطه بر دایره رسم شوند متساویند ، چنین خواهیم داشت :



ش ۵۲

$$BE=BF \quad ، \quad AE=AH$$
$$DG=DH \quad ، \quad CG=CF$$

چهار رابطه‌را باهم جمع می‌کنیم :

$$\underbrace{AE+BE}_{AB}+\underbrace{CG+DG}_{CD}=\underbrace{AH+DH}_{AD}+\underbrace{BF+CF}_{BC}$$

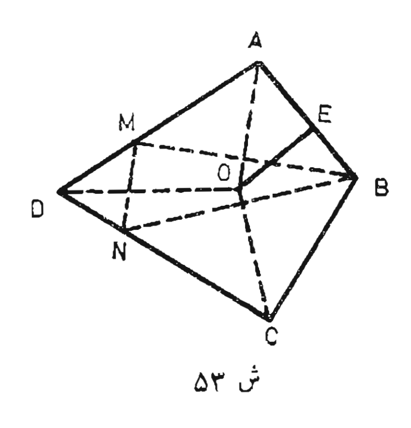
۴۲ ـ بعکس ، هرگاه دریك‌چهارضلعی‌مجموع دوضلع متقابل مساوی باشد با مجموع دو ضلع دیگر ، چهارضلعی محیطی است ، یعنی می‌توان دایره‌ای در آن محاط کرد .

فرض : $AB+CD=AD+BC$ (شکل ۵۳) .

حکم : چهارضلعی ABCD محیطی است .

برهان ـ AM را به اندازهٔ AB و CN را به اندازهٔ CB جدا می‌کنیم تا دومثلث متساوی‌الساقین AMB و CNB بوجودآیند . از M به N وصل می‌کنیم ؛ چون در رابطهٔ $AB+CD=AD+BC$ جملهٔ AB را به طرف دوم و BC را به‌طرف اول بیاوریم :

$$CD-BC=AD-AB$$



ش ۵۳

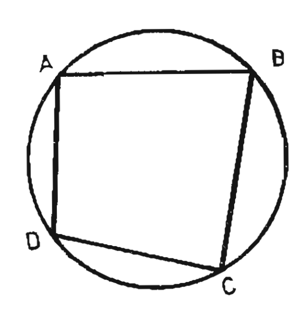
یا، با توجه به‌طرز اختیار نقاط M و N :

$$CD-CN=AD-AM \text{ یا } DN=DM$$

یعنی مثلث DMN نیز متساوی الساقین است .

نیمسازهای زوایای A و C و D را رسم می‌کنیم . این نیمسازها عمود منصفهای BM وBN وMN ، اضلاع مثلث BMN، هستند ؛ پس در یك نقطه مانند O متقاربند . این نقطه چون روی نیمساز $\hat{A}$ است ، از AB و AD ، وچون روی نیمساز $\hat{D}$ است ، ازAD و CD ، وچون روی نیمساز $\hat{C}$ است ، از CD و CB به یك فاصله است ؛ پس نقطهٔ O از چهار ضلع ABCD به یك فاصله می‌باشد و اگر به مرکز O و شعاع OE ، عمودی که بر ضلع AB وارد می‌شود ، دایره‌ای رسم کنیم ، بر هر چهار ضلع مماس خواهد شد ؛ یعنی چهارضلعی مفروض ، محیطی است .

۴۳ ـ قضیه ـ در هر چهارضلعی محاطی مجموع هردو زاویهٔ روبرو



ش ۵۴

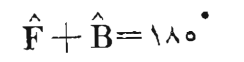
۱۸۰ درجه است (شکل ۵۴) . (اثبات بر عهدهٔ دانش‌آموزان است) .

۴۴ - بعکس : اگر در یك چهارضلعی مجموع دو زاویهٔ روبرو ۱۸۰ درجه باشد ، چهارضلعی محاطی است ، یعنی می‌توان برچهاررأس آن یك دایره گذراند.

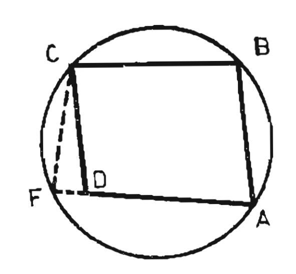
فرض : $\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ$ (شکل۵۵).

حکم : ABCD محاطی است .

برهان - دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم . این دایره بر D می‌گذرد ، زیراکه درغیراین صورت یکی‌ازدوضلع CD و AD ، یا امتداد آنهارا در نقطه‌ای مانند F قطع می‌کند و چهارضلعی ABCF محاطی می‌شود و لازم می‌آید که :



$\hat{F}+\hat{B}=۱۸۰^\circ$



ش ۵۵

شود ؛ پس : $\hat{F}=\hat{D}$ می‌شود ، یعنی $\hat{D}$ همان $\hat{F}$ است وبر روی دایره قرار دارد .

خلاصهٔ مطالب مهم :

۱- بر دو نقطه دایره‌های بیشمار مرور می‌کنند .

۲- برسه نقطه‌که بر روی یك خط راست نباشند ، فقط یك دایره مرور می‌کند .

۳- برسه نقطهٔ واقع بریك استقامت ، دایره مرور نمی‌کند .

۴- خط راست با دایره بیش‌ازدونقطهٔ مشترك نمی‌تواند داشته باشد .

۵- هرگاه فاصلهٔ مرکز دایره‌ای از خطی بیش از شعاع باشد ، خط با دایره هیچ نقطهٔ مشترك ندارد .

۶- هرگاه فاصلهٔ مرکز دایره‌ای ازخطی مساوی شعاع باشد ، خط بر دایره مماس است .

۷- مماس بر دایره برشعاع نقطهٔ تماس عمود است .

۸- هرگاه فاصلهٔ مرکز دایره از خطی کوچکتر از شعاع باشد ، خط دایره را در دو نقطه قطع می‌کند .

۹- خطی‌راکه بادایره دونقطهٔ مشترك داشته‌باشد، قاطع‌دایره می‌نامند.

۱۰- در دو دایرهٔ متخارج ، خط‌المرکزین بزرگتراست ازمجموع دو شعاع .

۱۱- در دو دایرهٔ مماس خارج ، خط‌المرکزین مساوی است با مجموع دو شعاع .

۱۲- در دو دایرهٔ متقاطع ، خط‌المرکزین ازمجموع دو شعاع‌کوچکتر و از تفاضل دو شعاع بزرگتر است .

۱۳- در دو دایرهٔ مماس داخل ، خط‌المرکزین مساوی است با تفاضل دو شعاع .

۱۴- در دو دایرهٔ متداخل ، خط‌المرکزین کوچکتر است از تفاضل دو شعاع .

۱۵- در دو دایرهٔ متقاطع ، خط‌المرکزین بر وتر مشترك عمود است و آن را نصف می‌کند .

۱۶- قطرعمود بر وتر، آن را نصف می‌کند ؛ همچنین قوسهای‌آن را .

۱۷- دریك دایره ، دو وترمتساوی مقابلند به دوقوس متساوی وبعکس.

۱۸- درهردایره ، وترهای متساوی ازمرکز به‌یك فاصله‌اند وبعکس .

۱۹- در یك دایره ، ازدو وترنامتساوی‌آن‌که بزرگتراست ، به مرکز دایره نزدیکتر است و بعکس .

۲۰- قوسهای یك دایرهٔ محدود به دو وترمتوازی ، متساویند .

۲۱- زاویهٔ مرکزی زاویه‌ای است‌که رأسش مرکزدایره‌باشد . اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مساوی است با اندازهٔ قوس مقابل آن .

۲۲ - زاویهٔ محاطی زاویه‌ای است که رأسش روی دایره و دو ضلعش وترهای دایره باشند . اندازهٔ زاویهٔ محاطی مساوی است با نصف اندازهٔ قوس مقابل آن .

۲۳- زاویهٔ ظلی زاویه‌ای است‌که رأسش روی دایره ویك ضلعش مماس

بردایره وضلع دیگرش وتری از دایره باشد . اندازهٔ زاویهٔ ظلی مساوی است با نصف اندازهٔ قوس مقابل آن .

۲۴- زاویهٔ داخلی زاویه‌ای است‌که رأسش داخل دایره باشد . اندازهٔ زاویهٔ داخلی مساوی است با نصف مجموع اندازه‌های دو قوس مقابلش .

۲۵ - زاویهٔ خارجی زاویه‌ای است که رأسش خارج دایره باشد و دو ضلعش یا دایره را قطع‌کنند یایکی‌ازآن دو ویا هردو بر دایره مماس باشند . اندازهٔ زاویهٔ‌خارجی مساوی‌است با نصف تفاضل اندازه‌های دوقوس مقابل‌آن.

۲۶- مکان هندسی رئوس زوایای مساوی α که اضلاعشان از دو نقطهٔ A وB بگذرند ، دوقوس ازدودایرهٔ متساوی است‌که ازدونقطهٔ A و B بگذرند. این قوسها را کمانهای درخور زاویهٔ αگویند .

۲۷- خط مماس بریك منحنی در یك نقطه مانند A ازاین منحنی‌وضع حدّ قاطعی‌مانند AM است وقتی‌که این قاطع در حول نقطهٔ A آنقدر دوران کندکه نقطهٔ M، درحالی‌که منحنی‌را طی می‌کند ، بینهایت به‌نقطهٔ A نزدیك شده و برآن منطبق شود .

۲۸- زاویهٔ دومنحنی ، زاویهٔ بین مماسهای بردو منحنی درنقطهٔ تقاطع آنهاست .

۲۹- دو دایره را برهم عمودگویند وقتی‌که زاویهٔ آنها قائمه باشد .

۳۰- در دو دایرهٔ عمود برهم ، شعاع نقطهٔ تقاطع از هریك بردیگری مماس است .

۳۱- هرگاه از یك نقطه دو مماس بردایره‌ای رسم‌کنیم ، اولاً دو مماس متساویند ، ثانیاً خطی‌که‌آن نقطه را به مرکز وصل می‌کند ، نیمساز زاویهٔ دو مماس است .

۳۲- مماس مشترك دودایره ، خطی‌است‌که برهردودایره مماس باشد . اگرهردودایره‌یك طرف مماس مشترك باشند ، مماس را مماس مشترك‌خارجی، واگر یکی‌از دودایره در یك طرف مماس مشترك ودایرهٔ دیگر درطرف دیگر مماس مشترك باشد ،آن را مماس مشترك داخلی‌گویند .

۳۳- دایرهٔ محیطی مثلث، دایره‌ای است‌که از سه رأس مثلث بگذرد . مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ، محل تلاقی سه عمودمنصف اضلاع مثلث می‌باشد .

۳۴- دایرهٔ محاطی‌داخلی‌مثلث ، دایره‌ای‌است‌که براضلاع مثلث مماس باشد. مرکزدایرهٔ محاطی‌داخلی‌مثلث ، نقطهٔ تلاقی نیمسازهای داخلی آن‌است.

۳۵- دایرهٔ محاطی‌خارجی مثلث ، دایره‌ای‌است‌که‌بریك ضلع وامتداد

دوضلع دیگر مثلث مماس باشد . مرکز دایرهٔ محاطی خارجی هر زاویهٔ مثلث نقطهٔ تلاقی نیمساز آن زاویه بانیمسازهای دوزاویهٔ خارجی‌غیرمجاورش‌می‌باشد؛ مثلث سه دایرهٔ محاطی خارجی دارد .

۳۶- چندضلعی رامحیط بردایره‌گویند وقتی‌که دایره برهمهٔ اضلاع‌آن مماس باشد .

۳۷- چندضلعی را محاط در دایره‌گویند وقتی‌که دایره بر تمام رئوس آن بگذرد .

۳۸- درهرچهارضلعی محیطی مجموع هردوضلع متقابل ، مساوی است با مجموع دو ضلع دیگر.

۳۹- اگردریك‌چهارضلعی مجموع هردوضلع متقابل باهم برابر باشند، آن چهارضلعی محیطی است .

۴۰- درچهارضلعی محاطی هردوزاویهٔ مقابل به‌هم مکمل یکدیگرند .

۴۱- اگر در یك چهارضلعی هر دو زاویهٔ مقابل به هم مکمل یکدیگر باشند ، آن چهارضلعی محاطی است .

تمرین

۱- برروی دایرهٔ C نقطه‌ای معین‌کنیدکه از نقطهٔ مفروض A به فاصلهٔ معین l باشد .

۲ - بر روی دایرهٔ C نقطه‌ای پیدا کنید که از خط مفروضی به فاصلهٔ معین l باشد .

۳- بر دونقطهٔ A وB دایره‌ای به شعاع R بگذرانید . برای هر یك مقدار R چند دایره می‌توان رسم‌کرد ؟

۴- دودایره یکدیگررا درP وM قطع می‌کنند . از P قاطع متغیری می‌گذرانیم تا دایره‌ها را در A و B قطع‌کند. ثابت‌کنیدکه $\widehat{AMB}$ مقداری است ثابت .

راهنمایی - از P دو مماس بر دو دایره رسم کنید . زاویهٔ بین دو مماس ثابت است .

۵- خطی‌که‌ازنقطهٔ تقاطع دودایره، موازی با خط‌المرکزین رسم شود،

درازترین قاطعی است‌که می‌توان در دو دایره رسم‌کرد .

۶- هرگاه دو وترمتساوی ، یکدیگر را درنقطهٔ M قطع‌کنند ، قطعاتی که به وسیلهٔ M برروی‌آنها جدا می‌شوند، دوبدو متساوی می‌باشند . همچنین اگر امتداد دو وترمتساوی یکدیگر را در بیرون دایره قطع کنند قطعاتی که برروی آنها احداث می‌شوند ، دوبدو متساویند .

۷- دو وترمتوازی‌که ازدوانتهای قطری رسم شوند، باهم برابرند .

۸- بردایره‌ای سه نقطهٔ M وN وP اختیار می‌کنیم وازA، وسط‌کمان MN به B وسط قوسNP وصل می‌کنیم . این خط وترهایMN وNP را بترتیب در C و D قطع می‌کند. ثابت‌کنیدکه $NC=ND$.

۹- ازنقطهٔP واقع برقطردایرهٔ Oبه A انتهای شعاع عمودبرآن وصل می‌کنیم ؛ امتدادAP دایره را درB قطع می‌کند ؛ درB مماسی بردایره رسم می‌کنیم تا OP را در C تلاقی کند . ثابت کنیدکه $CB=CP$.

۱۰- برنقطهٔ تماس دو دایره دو قاطع مرور می‌دهیم . ثابت کنید که وترهایی که از وصل‌کردن نقاط برخورد دو قاطع با محیط دایره‌های مفروض تشکیل می‌شوند ، با هم موازیند .

۱۱- مماسی‌که بروسط قوسی ازدایره رسم شود با وترآن قوس موازی است .

۱۲- اگر برنقطهٔ تماس دودایره قاطعی بگذرانیم واز نقاط دیگرتلاقی آن با دو دایره مماسهایی برآنها رسم‌کنیم، این مماسها با هم موازیند .

۱۳- در هر دایره دو وتر متقاطع متساوی ، قطرهای یك ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین هستند .

۱۴- در دو دایرهٔ هم‌مرکز ، وترهایی از دایرهٔ بزرگتر که بر دایرهٔ کوچکتر مماس باشند ، همه‌باهم مساویند .

۱۵- مماسهای مشترك خارجی دودایره یکدیگررا روی خط‌المرکزین قطع می‌کنند . همچنین مماسهای مشترك داخلی .

۱۶ - دوایری که مرکزهایشان سه رأس مثلث باشند و بر نقاط تماس اضلاع مثلث با دایرهٔ محاطی داخلی بگذرند ، بر یکدیگرمماس‌خواهند بود. همچنین دوایری که مراکزشان رئوس مثلث باشند و بر نقاط تماس اضلاع با

یکی از دوایر محاطی خارجی بگذرند، بر یکدیگر مماس خواهند بود. نوع تماس هر دو دایره را معین کنید .

۱۷ - در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC دایره‌ای بر A و B می‌گذرانیم بقسمی که در B بر وترمماس باشد ودایره‌ای هم بر C و A مرور می‌دهیم‌که در C بروترمماس شود . ثابت‌کنیدکه این دو دایره بر یکدیگرمماس هستند.

۱۸- خط Ax درنقطهٔ A بردایرهٔ O مماس‌است . ازنقطهٔ غیرمشخص B واقع بر دایره خط BH را بر Ax عمود می‌کنیم . ثابت کنید که BA نیمساز زاویهٔ OBH است .

۱۹- خط xy در نقطهٔ A بر دایرهٔ O مماس است . از نقاط B و C طرفین A واقع برxy دومماس BD و CE را بردایره رسم می‌کنیم . ثابت کنید که $\widehat{EAD}$ و $\widehat{COB}$ مکمل یکدیگرند.

۲۰ - خط Ax در نقطهٔ A بر دایرهٔ O مماس است . شعاع اختیاری OB($\widehat{BOA}>60°$) رامساوی‌خود تانقطهٔ C امتداد می‌دهیم ($OB=BC$) واز نقطهٔ C خط CD را بر Ax عمود می‌کنیم ؛ ثابت‌کنیدکه $BA=BD$ و $\widehat{OBD}=3\widehat{BDC}$.

راهنمایی - از B بر Ax عمود کنید

۲۱- از نقطهٔ ثابت A دو مماس AM و AN را بر دایرهٔ ثابتی رسم می‌کنیم . روی قوس‌کوچك MN یك نقطهٔ P بدلخواه انتخاب و مماس درP بر دایره را رسم می‌کنیم تا AM و AN را در B و C قطع‌کند . ثابت‌کنید که محیط مثلث ABC مساوی دو برابر AN است .

۲۲- در مثلث ABCکه محاط دردایرهٔ O می‌باشد ، AB ثابت‌است ورأس C در یکی‌ازدوطرف AB حرکت می‌کند . ثابت‌کنیدکه نیمساز زاویهٔ ACB همیشه ازنقطهٔ ثابتی واقع برروی محیط دایره می‌گذرد .

۲۳- دو وترمتوازی وهم‌جهت AA' وBB' ونقطهٔ غیرمشخصM واقع برروی محیط دایره‌ای مفروضند . ثابت‌کنیدکه زوایای AMB و $A'MB'$ یا متساویند یا مکمل یکدیگرند .

۲۴ - دایرهٔ O و قطر AB و وتر AC مفروضند.AD نیمساز زاویهٔ

CAB را رسم می‌کنیم . ثابت کنید که تفاضل دو زاویهٔ C و A از مثلث ACD یك قائمه و مماس درنقطهٔ D ارتفاع مثلث ACD است .

۲۵ ـ مثلث ABC و نقطهٔ غیر مشخص M واقع بر روی ضلع BC مفروضند . O و O' مراکزدوایر محیطی مثلثهای AMB و AMC می‌باشند. ثابت‌کنیدکه زوایای دو مثلث ABC و AOO' برابرند .

۲۶ـ مثلث ABC محاط در دایرهٔ O مفروض است . نیمسازهای دو زاویهٔ B و C یکدیگر را در نقطهٔ M و دایره را در نقاط B' و C' قطع می‌کنند ، ثابت کنیدکه مثلث $AB'C'$ بامثلث $MB'C'$ مساوی است و $B'C'$ عمودمنصف AM می‌باشد .

۲۷ـ ثابت کنید که در مثلث ABC نیمساز زاویهٔ A ، نیمساز زاویهٔ مابین ارتفاع AH و قطر MA دایرهٔ محیطی مثلث می‌باشد .

۲۸ـ مثلث ABC محاط دردایرهٔ O مفروض‌است. ارتفاعات BB' و CC' در H متقاطعند . اگر BC ثابت و نقطهٔ A بر روی کمان BAC حرکت کند ، مکان نقطهٔ H را تعیین کنید .

۲۹ ـ مثلث ABC محاط در دایرهٔ O مفروض است . نیمسازهای دو زاویهٔ B و C یکدیگر را در نقطهٔ I قطع می‌کنند . اگر BC ثابت بماند و نقطهٔ A برروی قوس BAC حرکت‌کند ، مکان هندسی نقطهٔ I را تعیین‌کنید .

۳۰ـ نقاط A' و B' و C' رابترتیب برروی اضلاع BC و AC و AB ازمثلث ABC اختیارمی‌کنیم . ثابت‌کنیدکه دوایرمحیطی مثلثهای $AB'C'$ و $BA'C'$ و $CA'B'$ در یك نقطه متقاطعند .

راهنمایی ـ دوتا ازدایره‌هایکدیگررا درM قطع می‌کنند. بااستفاده ازخاصیت چهارضلعیهای محاطی‌ثابت می‌شودکه دایرهٔ سوم هم برMمی‌گذرد .

۳۱ـ ثابت‌کنیدکه می‌توان هفت نقطهٔ حاصل ازرئوس وپای ارتفاعات و محل تلاقی‌سه‌ارتفاع هرمثلث را چهاربچهارطوری بههم وصل‌کردکه شش‌چهار‌ضلعی محاطی بدست آید . همچنین ثابت‌کنید که ارتفاعات مثلث ، نیمسازهای مثلث حاصل از وصل پایه‌های سه ارتفاع می‌باشند .

۳۲ـ ازنقطهٔ مفروض وتری به‌طول معلوم دردایرهٔ مفروضی رسم‌کنید .

۳۳ـ مثلثی رسم کنید که ازآن ، طول یك ضلع و زاویهٔ مقابل به‌آن و شعاع دایرهٔ محاطی معلوم باشد .

۳۴ـ دو دایرهٔ O و O' مفروضند . قاطعی چنان رسم‌کنیدکه دو دایره را قطع‌کند و وترهایی به طولهای معلوم l و l' ایجادکند .

۳۵ـ اولاً ـ ثابت کنید که عمود منصف یك ضلع مثلث و نیمساز زاویهٔ مقابل‌به‌آن ضلع بر روی محیط دایرهٔ محیطی مثلث متقاطعند . ثانیاً ـ مثلثی رسم کنید که طول ارتفاع ، میانه و نیمساز زاویهٔ داخلی مربوط به یکی از رئوس آن معلوم باشند .

۳۶ـ مثلثی رسم کنید که در آن شعاع دایرهٔ محیطی وارتفاع ونیمساز زاویهٔ داخلی مربوط به یکی از رئوس معلوم باشد .

۳۷ـ نقطهٔ M را در داخل مثلث ABC بطریقی تعیین کنیدکه ازآن نقطه سه ضلع مثلث به‌یك زاویه دیده شوند ، یعنی اگراز M به سه رأس مثلث وصل‌کنیم، سه زاویهٔ متساوی تشکیل شود .

۳۸ـ دایرهٔ O مفروض‌است. مطلوب‌است رسم وتری به‌طول‌معلوم l که وسط آن یا بر روی خط مفروض Δ یا بر روی دایرهٔ مفروضی باشد .

۳۹ـ مطلوب‌است رسم دایره‌ای به شعاع معلوم R بطوری‌که از دوخط معلوم دو وتر به طولهای l و l' جدا کند .

۴۰ـ از نقطهٔ A ، محل تلاقی دو دایرهٔ O و O'، قاطعی رسم کنید که دودایره را درنقاط B و C قطع‌کند بطوری‌که $BC=l$ باشد . (راهنمایی ـ از یك مثلث قائم‌الزاویه‌که وترش خط‌المرکزین‌است ، طول یك ضلع را می‌شناسیم) .

۴۱ـ مستطیلی رسم کنیدکه طول یك ضلع آن معلوم باشد و هریك از اضلاعش از یکی از نقاط معلوم E، F، G و H بگذرد .

۴۲ـ از یك چهارضلعی محاطی دو ضلع وزاویهٔ بین‌آنها و قطر مربوط به رأس این زاویه معلوم است ؛آن را رسم‌کنید .

۴۳ـ از یك چهارضلعی محاطی شعاع دایرهٔ محیطی و طول اقطار و

زاویهٔ مابین دو قطر معلوم است ؛آن را رسم‌کنید.

۴۴- از ذوزنقه‌ای طول دوقطر و یك قاعده و یك‌زاویهٔ مجاور به‌همان قاعده معلوم است ؛آن را رسم کنید .

۴۵- نقطهٔ غیر مشخص A واقع بر محیط دایرهٔ O و وتر BC معلوم است ؛ از A وتری رسم‌کنید که به وسیلهٔ BC نصف شود .

۴۶- خط d ونقطهٔ A واقع برآن ونقطهٔ B در خارج آن مفروضند . دایره‌ای چنان رسم‌کنیدکه از B بگذرد و در نقطهٔ A بر d مماس باشد.

۴۷- دایرهٔ O و نقطهٔ A واقع بر آن و نقطهٔ B مفروضند ؛ دایره‌ای چنان رسم‌کنیدکه ازنقطهٔ B گذشته در نقطهٔ A بردایرهٔ O مماس باشد .

فصل سیزدهم

مساحت اشکال

I ـ تعریفها و مقدمات ـ نسبت دو پاره‌خط

۱ـ **وسعت** هرشکل ، عبارت است از قسمتی از سطح که در داخل شکل واقع و به محیط آن محدود است .

۲ـ دو شکل را **معادل** یا **متعادل** گویند هرگاه از حیث وسعت یکسان باشند .

بنابراین ، **دو شکل برابر همیشه معادلند اما دو شکل معادل ممکن است برابر نباشند .**

۳ـ دو شکل که از جمع یا تفریق اشکال متساوی بدست آیند ، معادلند گرچه متساوی نباشند .

۴ـ اندازهٔ وسعت هر شکل را با واحد سطح تعیین می‌کنند یعنی نسبت وسعت شکل را به واحد سطح معین می‌کنند و نتیجه را **مساحت** آن شکل می‌گویند .

۵ ـ **واحد سطح** مربعی است که ضلعش برابر واحد طول باشد . چون واحد طول متر است ، واحد سطح **متر مربع** است که مربعی است به ضلع یك متر . ممکن است یکی از اضعاف یا اجزای متر به جای واحد طول اختیار شود . در این صورت واحد سطح بزرگتر یا کوچکتر از متر مربع خواهد بود . هر متر مربع برابر با صد دسیمتر مربع یا

ده هزار سانتیمتر مربع یا یك میلیون میلیمتر مربع است . دکامتر مربع مساوی صد متر مربع ، هکتومتر مربع برابر ده هزار متر مربع و کیلو مترمربع معادل یك میلیون مترمربع می‌باشد .

۶ ـ نسبت دو پاره‌خط ـ دو پاره‌خط AB و CD (شکل ۱) را درنظر می‌گیریم . فرض می‌کنیم که پاره‌خطی مانند AE وجود داشته باشد که درهر دو پاره‌خط AB و CD به دفعات صحیح بگنجد ، مثلاً m مرتبه در AB و n مرتبه در CD ؛ در این صورت کسر $\frac{m}{n}$ را نسبت AB به CD می‌نامند وآن را اینطور می‌نویسند : $\frac{AB}{CD}=\frac{m}{n}$.

ش ۱

در شکل ۱ این نسبت مساوی $\frac{۴}{۵}$ است .

$$\frac{AB}{CD}=\frac{۴}{۵}$$

تعریف ـ هر پاره‌خطی را که به دفعات صحیح در دو پاره‌خط بگنجد ، **مقیاس مشترك** آن دو پاره‌خط می‌گویند . در شکل ۱، AE مقیاس مشترك دو پاره‌خط AB و CD است .

توجه کنید ! وقتی دو پاره‌خط مقیاس مشترکی داشته باشند ، نسبت آنها یك کسر یا عدد کسری و یا عدد صحیح خواهد بود ؛ اما اگر دو پاره‌خط مقیاس مشترك نداشته باشند ، نسبت آنها عددی است اصم و آن را با تقریب (نقصانی یا اضافی) تا هر اندازه که بخواهیم حساب می‌کنیم .

محاسبهٔ نسبت دو پاره‌خط با تقریب ـ دو پاره‌خط AB و CD (شکل ۲) را در نظر می‌گیریم . فرض می‌کنیم که پاره‌خطی مثل CE وجود داشته باشد (*) که در قطعه‌خط CD به دفعات صحیح بگنجد ، مثلاً ده مرتبه ، ولی در AB به دفعات صحیح نگنجد . مثلاً اگر شش

ش ۲

طول متساوی $AE'=CE$ از A متوالیاً جدا کنیم به اندازهٔ MB (کوچکتر از AE') زیاد بیاید واگر هفت طول متساوی AE' از A جدا کنیم به‌اندازهٔ $BF<AE'$ کم باشد ، دراین‌صورت ، نسبت AB به CD بین دو عدد $\frac{۶}{۱۰}$ و $\frac{۷}{۱۰}$ خواهد بود :

$$\frac{۶}{۱۰}<\frac{AB}{CD}<\frac{۷}{۱۰}$$

نسبت $\frac{AB}{CD}$ با کمتر از $\frac{۱}{۱۰}$ **تقریب نقصانی** کسر $\frac{۶}{۱۰}$ وبا کمتر از $\frac{۱}{۱۰}$ **تقریب اضافی** کسر $\frac{۷}{۱۰}$ است .

حال اگر دو پاره‌خط AB و CD را با قطعه‌خط CK که نصف CE است بسنجیم، واضح است که پاره‌خط CK در CD بیست مرتبه می‌گنجد ولی در قطعه‌خط AB مثلاً از ۱۳ مرتبه بیشتر و از ۱۴ مرتبه کمتر می‌گنجد (اختلاف همیشه یك است) در این صورت ، نسبت $\frac{AB}{CD}$ بیـن

(*) همیشه می‌توانیم با قاعدهٔ تقسیم یك قطعه‌خط به قطعات متساوی ، پاره‌خطی پیدا کنیم که درآن به دفعات صحیح بگنجد .

$\frac{۱۳}{۲۰}$ و $\frac{۱۴}{۲۰}$ خواهد بود :

$$\frac{۱۳}{۲۰}<\frac{AB}{CD}<\frac{۱۴}{۲۰}$$

می‌بینید که نسبت $\frac{AB}{CD}$ با تقریب کمتر از $\frac{۱}{۲۰}$ که نصف تقریب دفعهٔ اول است ، تعیین شده است . حال اگر دو قطعه‌خط AB و CD را با قطعه‌خطهایی نظیر CK که از تقسیمات متساوی CE بوجود می‌آیند و بتدریج کوچکتر و کوچکتر اختیارمی‌شوند بسنجیم ، نسبت $\frac{AB}{CD}$ باتقریب کمتر از هرقدر که بخواهیم بدست خواهد آمد .

بنابراین ، در یك نسبت اصمّ ، می‌توان فرض کرد که حدّ تقریب باندازه‌ای کوچك باشدکه قابل توجه نبوده بتوان مقدارتقریبی را به‌عوض نسبت واقعی‌اختیارکرد؛ وبنابرهمین فرض است‌که درنسبت اصمّ دو پاره‌ـ خط ، آن دو پاره‌خط را دارای مقیاس مشترك می‌انگاریم .

یك نکتهٔ مهم ! اگر پاره‌خط CD واحدطول فرض شود،نسبت $\frac{AB}{CD}$ مساوی اندازهٔ قطعه‌خط AB خواهد بود ؛ بنابراین ، اندازهٔ پاره‌ـ خطی مانند AB ممکن‌است عددی صحیح یا کسری یا یك‌کسر ویاعددی اصم باشد .

با توجه به نکتهٔ بالا ، نسبت دو پاره‌خط را اینطور هم می‌توان تعریف کرد :

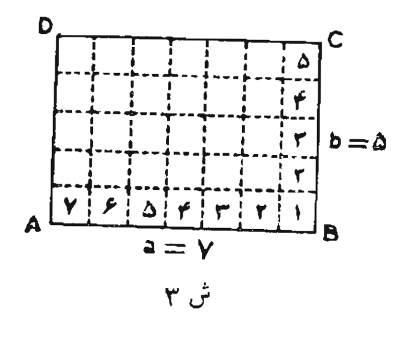
نسبت پاره‌خط AB به پاره‌خط CD ، عددی است که اندازهٔ قطعه ـ خط AB باشد ، وقتی‌که قطعه‌خط CD واحد طول گرفته شود .

II ـ مساحت اشکال

۷ـ پیش از آنکه به شرح قضایا واحکام مربوط به مساحت اشکال بپردازیم ، یادآور می‌شویم که در مساحتها ، هرجا ذکری ازحاصل‌ضرب دو پاره‌خط یا دو بعد شکلی (مثلاً قاعده وارتفاع) به میان‌آید ، مقصود، حاصل‌ضرب دو عددی است که اندازه‌های آن دو پاره‌خط یا آن دو بُعد باشند با یك واحد طول .

۸ ـ قضیه ـ مساحت مستطیل مساوی است با حاصل ضرب دو بُعد آن (قاعده در ارتفاع) .

برهان ـ برحسب‌آنکه a و b ، اندازه‌های دو بُعد AB و BC از مستطیل ABCD (شکل ۳) ، چه نوع اعدادی باشند ، سه حالت ممکن است اتفاق افتد :



ش ۳

حالت اول ـ a و b هردوعدد صحیحند .

دراین‌صورت ، اگر AB رابه a جزء متساوی و BC را به b جزء متساوی تقسیم کنیم ، هر یك ازاجزا یك واحد طول‌خواهدبود ؛ وچون ازنقاط تقسیم AB خطوطی موازی با BC رسم کنیم ، مستطیل ABCD به a مستطیل متساوی تقسیم می‌شود ؛ همچنین اگر از نقاط تقسیم BC خطوطی موازی با AB بکشیم ، هر یك از a مستطیل جزء ، به b مربع متساوی که هر مربع یك واحد سطح خواهد بود ، تقسیم می‌شود و بنا بر این ، مستطیل ABCD شامل a برابر b مربع ، یعنی

$a\times b$ مربع خواهدبود ؛ پس مقدار s ، مساحت مستطیل ، دراین‌حالت چنین می‌شود :

$$s=a\times b$$

حالت دوم ـ هر دو عدد a و b یا یکی از آنها کسری است .

دراین‌صورت ، اعداد a و b راپس از تجنیس به‌یك مخرج تحویل کرده فرض می‌کنیم :

$$(I)\qquad \begin{cases} AB=a=\frac{c}{m}=c\times\frac{1}{m} \\ BC=b=\frac{d}{m}=d\times\frac{1}{m}\end{cases}$$

حال اگر برای اندازه گیری طولها ، $\frac{1}{m}$ واحدطول‌راواحدبگیریم، برحسب واحد جدید طول ، چنین خواهیم داشت :

الف ـ اندازهٔ واحد اصلی طول ، مساوی است باعدد صحیح m .

ب ـ اندازه‌های AB و BC ، دو بُعد مستطیل $ABCD$، بترتیب برابر است با دوعدد صحیح c و d .

پس ، بنابرآنچه‌که درحالت اول گفته شد ، برحسب واحد جدید سطح ، روابط زیر را خواهیم داشت :

$c\times d=$ مساحت مستطیل $ABCD$

$m^2=$ مساحت واحد اصلی سطح

وازاینجا ، با ملاحظهٔ اینکه $c\times d=\frac{c\times d}{m^2}\times m^2$ ، معلوم می‌شودکه وسعت مستطیل $ABCD$، $\frac{c\times d}{m^2}$ برابر واحد اصلی سطح است و

بنابراین :

$$s=\frac{c\times d}{m^2}=\frac{c}{m}\times\frac{d}{m}$$

و یا ، با توجه به روابط (I) :

$$s=a\times b$$

حالت سوم ـ هردوعدد a و b یا یکی ازآنها اصمّ است.

چون قضیه برای جمیع مقادیر تقریبی a و b به طریق بالا ثابت می‌شود ، دراین حالت نیزمحقق است ؛ یعنی بازهم $s=a\times b$.

نتیجهٔ ۱ـ مساحت مربع مساوی است با توان دوم ضلع آن .

به همین مناسبت است که توان دوم یك عدد را مربع آن عدد می‌خوانند .

نتیجهٔ ۲ـ نسبت مساحتهای دو مستطیل مساوی است با نسبت حاصل ضربهای دو بُعدآنها واگردو مستطیل در یك‌بُعد مشترك باشند،مساحتهایشان برنسبت دو بعد دیگر است .

زیرا اگر دومستطیل ، یکی به‌ابعاد a و b ومساحت s ودیگری ، به ابعاد a' و b' ومساحت s' مفروض باشند ، نسبت مساحتهای آنها ، با توجه به قضیهٔ شمارهٔ ۸ همین فصل ، چنین خواهد بود :

$$\frac{s}{s'}=\frac{a\times b}{a'\times b'}$$

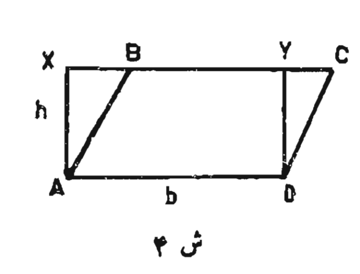
و اگر فرضاً $b=b'$ باشد ، با حذف عامل مشترك b و b' از صورت ومخرج‌کسرطرف دوم رابطهٔ اخیر، چنین خواهیم داشت :

$$\frac{s}{s'}=\frac{a}{a'}$$

۹ ـ تعریف ـ در متوازی الاضلاع ، هر ضلع را **قاعده** و فاصلهٔ قاعده را از ضلع مقابل ، **ارتفاع** متوازی‌الاضلاع می‌گویند .

۱۰ ـ قضیه ـ مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است باحاصل‌ضرب قاعدهٔ آن در ارتفاعش .

برهان ـ متوازی‌الاضلاع ABCD (شکل ۴) مفروض است . AX و DY را عمود بر AD می‌کشیم تا مستطیل AXYD به‌ابعاد b و h (قاعده و ارتفاع متوازی‌الاضلاع) بدست آید . این مستطیل با متوازی الاضلاع مفروض معادل است :



ش ۴

زیرا که : $\Delta DYC = \Delta AXB$

و چون مساحت $AXYD = b \times h$

پس مساحت $ABCD = b \times h$

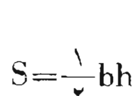
۱۱ـ نتیجه ـ دو متوازی‌الاضلاع که قاعده‌های آنها یکی و ارتفاعهایشان نیز یکی باشد ، معادلند .

۱۲ ـ قضیه ـ مساحت مثلث مساوی است با نصف حاصل ضرب یك ضلع در ارتفاع وارد بر آن .

برهان ـ مثلث ABC مفروض است (شکل ۵) . از دو رأس ، مثلاً B و C ، دو خط موازی با دو ضلع مقابل به این رئوس می‌کشیم

تا متوازی الاضلاع ABDC تشکیل شود. ارتفاع BX=h را هم رسم می‌کنیم . مثلث ABC نصف متوازی‌الاضلاع ABDC است (چرا؟) ، پس اگر مساحت آن را S بنامیم :

ش ۵



$$S = \frac{1}{2} bh$$

۱۳ ـ نتیجه ـ مساحتهای دو مثلث بر همان نسبتند که حاصل ـ ضربهای قاعده و ارتفاع آنها و اگر در قاعده (یا ارتفاع) مشترك باشند ، مساحتهایشان بر نسبت دو ارتفاع (یا دو قاعده) است .

۱۴ـ قضیه ـ نسبت مساحتهای دو مثلث که یك زاویهٔ مساوی یا مکمل داشته باشند ، مساوی است با نسبت حاصل ضربهای اضلاع آن زاویه .

فرض: دومثلث ABC و ADE در زاویهٔ A مشترکند(شکل۶).

حکم:
$$\frac{\text{مساحت } ABC}{\text{مساحت } ADE} = \frac{AB \cdot AC}{AD \cdot AE}$$

ش ۶

برهان ـ اگر دو مثلث جدا باشند ، آنها را بر هم منطبق می‌سازیم تا به‌صورت شکل ۶ درآیند . آنگاه از E به B وصل می‌کنیم . مساحتهای دومثلث ABC و ABE که در ارتفاع رأس B

مشترکند، بر نسبت قاعده‌های آنها، یعنی بر نسبت **AC** و **AE**، می‌باشند:

$$\frac{\text{مساحت } ABC}{\text{مساحت } ABE}=\frac{AC}{AE} \qquad (۱)$$

و نیز در دو مثلث **ABE** و **ADE** که در ارتفاع رأس **E** اشتراک دارند:

$$\frac{\text{مساحت } ABE}{\text{مساحت } ADE}=\frac{AB}{AD} \qquad (۲)$$

چون دو رابطهٔ ۱و۲ را عضو بعضو درهم ضرب کرده ودر طرف اول، عامل مشترك یعنی (**ABE** مساحت) را از صورت و مخرج حذف کنیم:

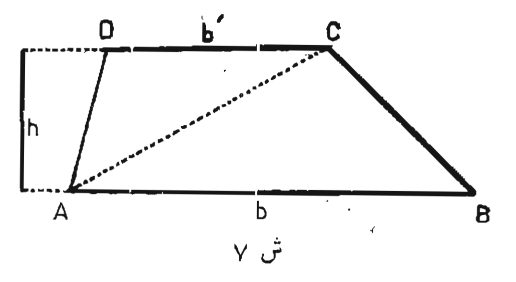
$$\frac{\text{مساحت } ABC}{\text{مساحت } ADE}=\frac{AB \cdot AC}{AD \cdot AE}$$

تمرین ـ اثبات حالتی که دو زاویه مکمل باشد، بعهدهٔ دانش‌آموزان است.

۱۵ ـ تعریف ـ ارتفاع ذوزنقه خطی است که از یك نقطهٔ یك قاعده بر قاعدهٔ دیگر عمود شود.

۱۶ـ قضیه ـ مساحت ذوزنقه برابر است با حاصل ضرب مجموع دو قاعدهٔ آن در نصف ارتفاعش.

برهان ـ قطر **AC** در ذوزنقهٔ **ABCD** (شکل ۷) آن را به دو



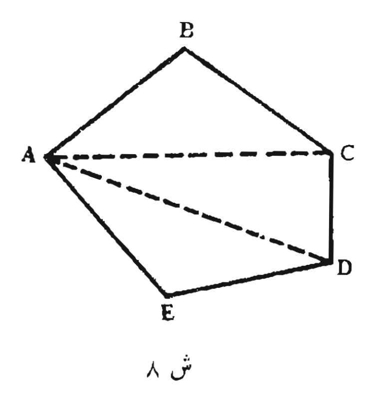
ش ۷

مثلث **ABC** و **ACD** تجزیه می‌کند که ارتفاع هر دو **h** و قاعده‌هایشان بترتیب **AB** و **CD** اند:

$$\text{مساحت } ABCD = \text{مساحت } ABC + \text{مساحت } ACD$$

$$=\frac{1}{2}bh+\frac{1}{2}b'h=\frac{1}{2}h(b+b')$$

۱۷ـ برای تعیین مساحت چندضلعی غیرمنتظم، به یکی از این دو راه عمل می‌شود:



ش ۸

الف ـ قطرهای چندضلعی را که از یك رأس، مثلاً از رأس **A**، خارج می‌شوند، رسم می‌کنیم (شکل ۸) تا چندضلعی به چند مثلث تجزیه شود. آنگاه مساحات مثلثها را جداگانه یافته با هم جمع می‌کنیم.

ب ـ AD بزرگترین قطر چندضلعی را رسم می‌کنیم (شکل ۹). از سایر رئوس عمودهای **BH** و **CK** و ... را بر **AD** فرود می‌آوریم تا چندضلعی به یك عده مثلث و ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه تقسیم شود. آنگاه مساحتهای این اشکال را بدست می‌آوریم و بر هم می‌افزاییم تا مساحت چندضلعی حاصل شود.

ش ۹

خلاصهٔ مطالب مهم:

۱ـ وسعت هر شکل عبارت است از قسمتی از سطح که در داخل شکل واقع و به محیط آن محدود است.

۲ـ دو شکل را معادل گویند هرگاه از حیث وسعت یکسان باشند ؛ دو شکل برابر همیشه معادلند اما دوشکل معادل ممکن‌است برابر نباشند .

۳ـ دو شکل‌که ازجمع یا تفریق اشکال متساوی بدست آیند ، معادلند گرچه متساوی نباشند .

۴ـ مساحت هرشکل یعنی نسبت وسعت آن به واحد سطح .

۵ـ اگر پاره‌خط AE به‌دفعات صحیح m و n بترتیب دردو پاره‌خط AB وCD بگنجد ، دراین صورت‌کسر $\frac{m}{n}$ را نسبت AB به CD می‌نامند وآن را اینطورمی‌نویسند : $\frac{AB}{CD}=\frac{m}{n}$ وپاره‌خط AE راکه به‌دفعات صحیح در دوپاره‌خط AB وCD گنجیده‌است ، مقیاس مشترك دوپاره‌خط ABوCD می‌خوانند .

۶ـ وقتی دو پاره‌خط مقیاس مشترکی داشته باشند ، نسبت‌آنها یك‌کسر یا عددکسری ویا عدد صحیح خواهد بود ؛ اما اگر دو پاره‌خط مقیاس مشترك نداشته‌باشند ، نسبت آنها عددی است اصم وآن را با تقریب نقصانی یا اضافی تعیین می‌کنند .

۷ـ اگر پاره‌خط CD واحد طول فرض شود ، نسبت $\frac{AB}{CD}$ مساوی‌اندازهٔ قطعه‌خط AB خواهد بود . بنابراین ، اندازهٔ پاره‌خطی مانند AB ممکن است عددی صحیح یا کسری یا یك کسر و یا عددی اصمّ باشد .

۸ـ نسبت پاره‌خط AB به‌پاره‌خط CD ، عددی است‌که اندازهٔ قطعه‌خط AB باشد وقتی‌که قطعه خط CD واحد طول‌گرفته شود .

۹ـ مساحت مستطیل مساوی است باحاصل ضرب دو بُعدآن .

۱۰ـ مساحت مربع مساوی است باتوان دوم ضلع‌آن .

۱۱ـ نسبت مساحتهای دو مستطیل برابر است با نسبت حاصل ضربهای دوبعدآنها واگر دومستطیل در یك بعد مشترك باشند ، مساحتهایشان برنسبت دو بعد دیگر است.

۱۲ـ مساحت متوازی الاضلاع مساوی است با حاصل ضرب قاعده در ارتفاع .

۱۳ـ مساحت مثلث مساوی‌است بانصف حاصل‌ضرب قاعده در ارتفاع .

۱۴ـ نسبت مساحتهای دو مثلث که یك زاویهٔ مساوی یا مکمل داشته باشند ، مساوی است بانسبت حاصل ضربهای‌اضلاع‌آن زاویه .

۱۵ـ مساحت ذوزنقه برابر است با حاصل ضرب مجموع دو قاعده در نصف ارتفاع .

تمرین

۱ـ یك ضلع مستطیلی سه برابر ضلع دیگر است و مساحت آن ۸/۶۷ سانتیمترمربع است ؛ ضلع آن را بدست آورید .

۲ـ دو بعد مستطیلی ۱۵ و ۷ است. از یکی ۴ کم می‌کنیم . به دیگری چقدر بیفزاییم تا مساحت آن تغییری نکند ؟

۳ـ در دایره‌ای به شعاع R مستطیلی محاط کنیدکه مساحتش S باشد.

۴ـ هرخط که بر مرکز متوازی‌الاضلاع بگذرد ، آن را به دو ذوزنقهٔ متساوی تقسیم می‌کند .

۵ـ از یك نقطهٔ واقع برقطر متوازی‌الاضلاع دوخط موازی با دو ضلع رسم می‌کنیم . ثابت‌کنیدکه دو متوازی‌الاضلاع معادل بوجود می‌آیند .

۶ـ اضلاع مستطیلی‌را در یك جهت به‌اندازهٔ خودشان امتداد می‌دهیم . ثابت‌کنیدکه انتهای‌این‌چهار طول، رئوس متوازی‌الاضلاعی هستندکه مساحتش ۵ برابرمستطیل مفروض است .

۷ـ مساحت مثلث قائم‌الزاویه مساوی است با حاصل ضرب دوقطعه‌ای‌که دایرهٔ محاطی از وترجدا می‌کند .

۸ـ اگرشعاع دایرهٔ محاطی مثلثی۲ باشد ، اندازه‌های محیط و مساحت مثلث با یك عدد بیان می‌شوند .

۹ـ ذوزنقهٔ متساوی الساقین ABCD وارتفاع CC' آن مفروضند . ثابت‌کنیدکه مساحت ذوزنقه دوبرابرمساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ ACC' است.

۱۰ـ مساحت ذوزنقه مساوی است باحاصل ضرب یك ساق درفاصلهٔ آن ساق از وسط ساق دیگر.

۱۱ـ درذوزنقه‌ای $b=۳$ (قاعدهٔ‌کوچکتر)، $B=۶$ (قاعدهٔ بزرگتر) و$h=۵$. مساحت چهار مثلث حادث از تقاطع قطرها را حساب کنید .

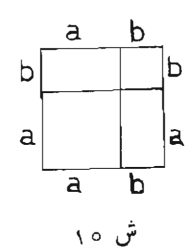
۱۲ـ خط Δ درخارج مثلث ABC مفروض است . عمودهای AA' ، BB' وCC' را بر Δ فرود می‌آوریم و اوساط‌آنهارا A''،B'' وC'' می‌نامیم.

ثابت‌کنیدکه مساحت مثلث A"B"C" نصف مساحت مثلث ABC است .

۱۳- مساحت هر چهارضلعی مساوی است با نصف حاصل ضرب یك قطر درتصویرقطردیگر برروی خط عمود بر اولی .

۱۴- هرگاه از وسط ضلع‌مثلث دوخط موازی بادوضلع دیگرآن‌بکشیم، متوازی الاضلاعی معادل نصف مثلث مفروض بدست می‌آید .

۱۵- خطی موازی با ضلع BC ازمثلث ABC رسم می‌کنیم تا ضلع AB را در N و AC را در M قطع کند و BM و CN را وصل می‌کنیم تایکدیگررا در P تلاقی‌کنند. ثابت کنیدکه دو مثلث PCM و PBN معادل یکدیگرند .



ش ۱۰

۱۶- بامراجعه به شکل۱۰ ثابت‌کنیدکه :

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

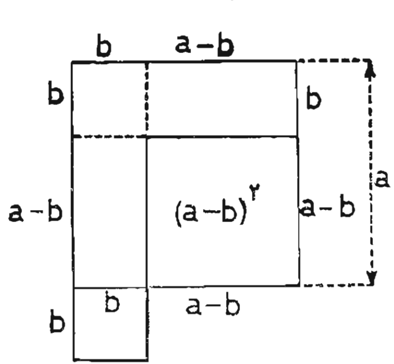
۱۷- بامراجعه به شکل ۱۱ ثابت‌کنیدکه :

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

۱۸- ثابت‌کنید که :

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

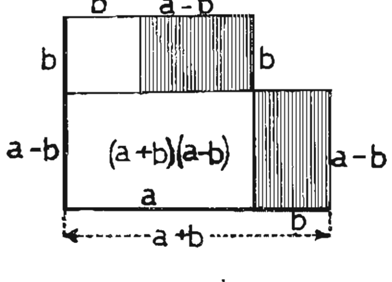
راهنمایی - با مراجعه به شکل ۱۲.



ش ۱۱

۱۹- در مربعی به ضلع a ، قطر برابر است با $a\sqrt{2}$.

۲۰ - مساحت مربعی که بر روی وترمثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین بناشود ، چهار برابر مساحت مثلث است .



ش ۱۲

۲۱ - مطلوب است مساحت ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی که یکی از زاویه‌های آن ۶۰ درجه بوده واین معلومات از آن نیزدر دست باشد :

الف - دو قاعده .

ب - یك قاعده و ارتفاع .

ج - یك قاعده و ساق .

۲۲- اگر بر روی اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای سه مربع درخارج این مثلث بسازیم و رئوس مجاورآنهارا وصل‌کنیم ، سه مثلث معادل با مثلث اصلی ایجاد می‌شوند .

۲۳ - در مثلث ABC ، نقطهٔ M را بدست آورید بقسمی که مثلثهای MAB و MBC و MCA با هم معادل باشند .

فصل چهاردهم

قطعه خطهای متناسب - تشابه

۱- نسبت و تناسب - درحساب دیده‌ایم که نسبت دوعدد، خارج قسمت آن دو عدد است؛ یا به عبارت دیگر، کسری است که آن دو عدد صورت و مخرج آن باشند.

نسبت دو پاره‌خط، نسبت دو عددی است که اندازه‌های آن دو پاره‌خط باشند وقتی‌که هر دو پاره‌خط با یك واحد اندازه گرفته شوند.

تناسب عبارت است از بیان تساوی دو نسبت.

درشکل ۱ دو پاره‌خط AB و CD هردو بایك واحد اندازه‌گرفته شده‌اند ونسبت آنها چنین‌است:

$$\frac{AB}{CD}=\frac{۸}{۶}=\frac{۴}{۳}$$

ش ۱

دو پاره‌خط EF و GH نیز با یك واحد دیگر اندازه‌گرفته شده‌اند ونسبت آنها اینطور است:

$$\frac{EF}{GH}=\frac{۴}{۳}$$

از بیان تساوی دو نسبت $\frac{AB}{CD}$ و $\frac{EF}{GH}$ تناسب زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{AB}{CD}=\frac{EF}{GH}$$

و در این صورت چهار قطعه خط AB و CD و EF و GH را متناسب و هر یك از آنها را چهارم جزء تناسب بین سه قطعه خط دیگر می‌نامند.

درهر تناسب، دوجزء اول وچهارم را **طرفین** ودو جزء دوم وسوم را **وسطین** تناسب می‌نامند.

خواص تناسب را درحساب و جبر دیده‌اید ومی‌دانید که:

۱- درتناسب، حاصل‌ضرب طرفین مساوی‌است باحاصل‌ضرب وسطین.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$
$$ad=bc$$

۲- در هر تناسب می‌توان جای طرفین را با هم عوض کرد؛ همچنین‌جای وسطین‌را. در این هر دو صورت، تناسبی تازه بوجود می‌آید.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$
$$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}\ ،\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

۳- در هر تناسب می‌توان دو نسبت را معکوس کرد.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\ ،\ \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

۴- در هر تناسب می‌توان در صورت، یا در مخرج، یا در هر دو، ترکیب یا تفضیل نسبت کرد.

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}\ ،\ \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$
$$\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}\ ،\ \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$$
$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

اگر طرفین تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (یا وسطین آن) با هم برابر باشند، داریم:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{a}$$

یا:

$$a^2=b\cdot c$$

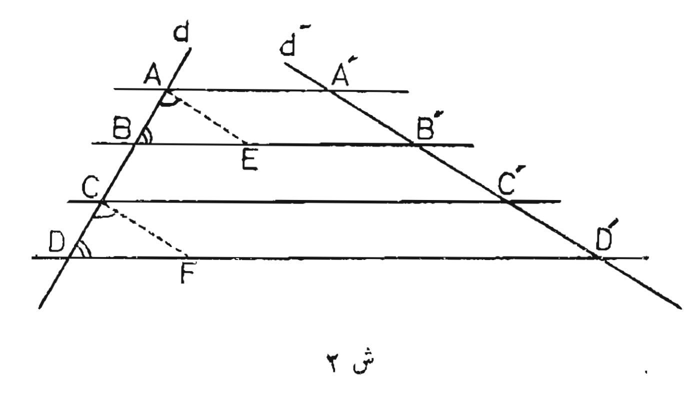
در این صورت ، a را واسطهٔ هندسی مابین b و c می‌نامند .

واسطهٔ هندسی دو عدد ، عددی است که مجذورش مساوی حاصل‌ضرب آن دو عدد باشد .

یا اگر رابطهٔ اخیررا به صورت $a=\sqrt{b.c}$ بنویسیم ، می‌توان گفت :

واسطهٔ هندسی دو عدد ، جذر حاصل ضرب آن دو عدد است .

۲ـ قضیه ـ هرگاه چند خط متوازی دو خط را قطع کنند و بر روی یکی قطعات متساوی جدا کنند ، بر روی دیگری هم قطعات متساوی جدا می‌کنند .



ش ۲

فرض : $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$

$AB=BC=CD$ (شکل ۲) .

حکم : $A'B'=B'C'=C'D'$

برهان ـ اگر ثابت کنیم که دو قطعهٔ دلخواه از خط d' ، مثلاً $A'B'$ و $C'D'$ ، باهم برابرند، حکم برای همهٔ قطعات ثابت‌خواهد شد .

از A و C دو پاره‌خط AE و CF را موازی با d' رسم می‌کنیم .

می‌بینیم‌که نسبت به دومتوازی AE و CF وموّرب AC دو زاویهٔ متقابل داخل و خارج EAB و FCD متساوی می‌شوند . و نیز نسبت به دو متوازی BB' و DD' و مورب BD :

$$\widehat{ABE}=\widehat{CDF}$$

پس دو مثلث ABE و CDF (به‌حالت زض‌ز) متساوی می‌شوند،

و $$AE=CF \qquad (۱)$$

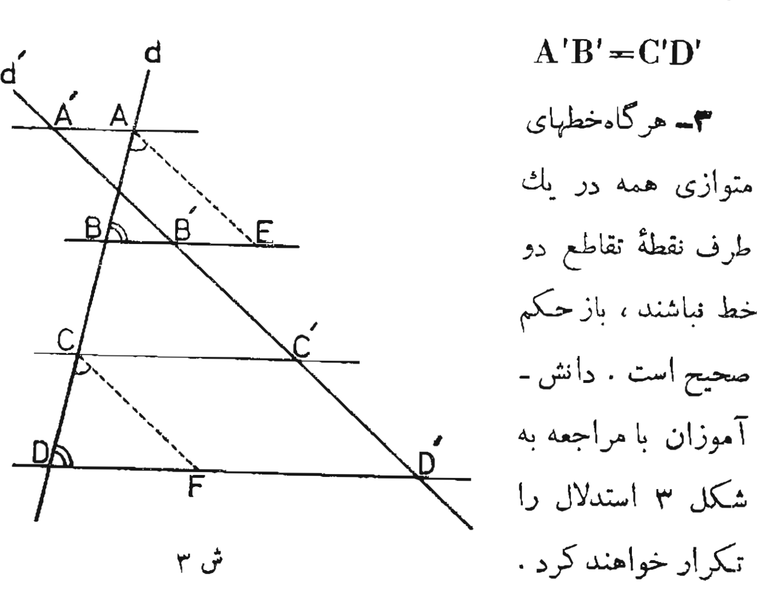
اما در متوازی‌الاضلاع $AA'B'E$ ، $AE=A'B'$

و در متوازی‌الاضلاع $CC'D'F$ ، $CF=C'D'$

چون در رابطهٔ ۱ به جای AE و CF مساویهایشان را قرار دهیم :

$$A'B'=C'D'$$

۳ـ هرگاه‌خطهای متوازی همه در یك طرف نقطهٔ تقاطع دو خط نباشند ، باز حکم صحیح است . دانش‌آموزان با مراجعه به شکل ۳ استدلال را تکرار خواهند کرد .



ش ۳

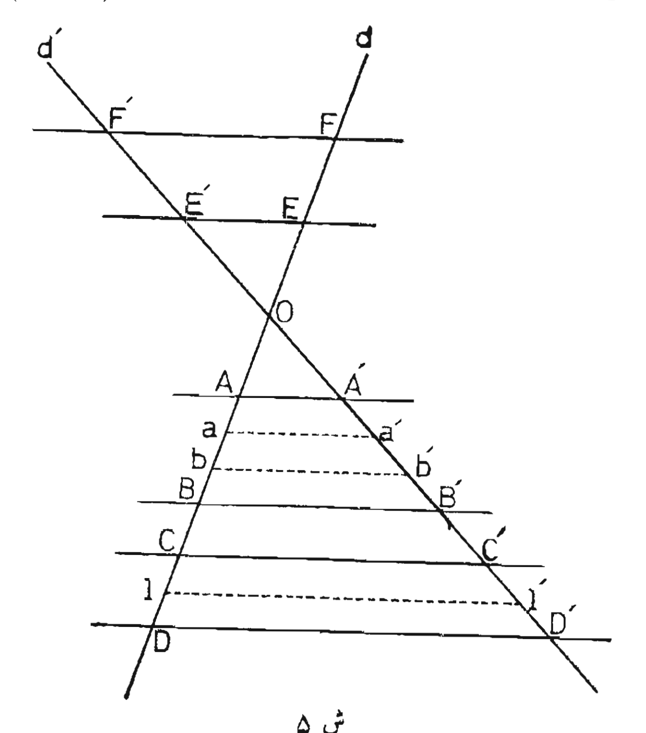
۴ ـ مسئله ـ می‌خواهیم پاره‌خط AB را به ۶ جزء متساوی تقسیم کنیم .

از A نیم‌خط Ax را می‌کشیم (شکل ۴) و بر روی آن ازمبدأ A پشت سرهم شش‌طول متساوی دلخواه جدا می‌کنیم تا C بدست آید. از C به B وصل می‌کنیم. خطوطی که از نقاط تقسیم به موازات CB رسم شوند، AB را به شش جزء متساوی تقسیم می‌کنند.

ش ۴

۵ـ قضیهٔ تالس ـ هرگاه چند خط متوازی دوخط را قطع کنند، بر روی آنها قطعات متناسب بوجود می‌آورند.

فرض: $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel \dots \parallel FF'$ (شکل ۵).



ش ۵

حکم:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{C'D'}{CD}=\dots=\frac{E'F'}{EF}$$

برهان ـ کافی است ثابت کنیم که دو قطعه از قطعاتی که بر d احداث شده‌اند و بین برخی از خطوط متوازی محصورند، با دو قطعه که به وسیلهٔ همان خطوط متوازی روی d' بوجود آمده‌اند، متناسبند؛ مثلاً ثابت کنیم‌که:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{C'D'}{CD}$$

فرض می‌کنیم که AB و CD را با مقیاس مشترکی اندازه گرفته باشیم و نسبت آنها مثلاً:

$$\frac{CD}{AB}=\frac{m}{n}=\frac{۲}{۳} \qquad (۱)$$

شده باشد؛ CD را به m و AB را به n جزء متساوی تقسیم می‌کنیم و از a و b و . . .، نقاط تقسیم، خطوطی موازی با AA' می‌کشیم تا d' را در a' و b' و . . . قطع‌کنند؛ به موجب قضیهٔ ۲، قطعاتی که خطوط متوازی مرسوم روی $C'D'$ و $A'B'$ جدا می‌کنند، متساوی خواهند بود و درنتیجه $C'D'$ به m و $A'B'$ به n جزء **متساوی** تقسیم می‌شوند، یعنی:

$$\frac{C'D'}{A'B'}=\frac{m}{n} \qquad (۲)$$

چون دو تناسب ۱ و ۲ یك نسبت مشترك، یعنی $\frac{m}{n}$ دارند، نتیجه می‌گیریم‌که:

$$\frac{CD}{AB}=\frac{C'D'}{A'B'}$$

یا:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{C'D'}{CD}$$

به همین روش ثابت می‌شود که نسبتهای دیگر هم با $\frac{A'B'}{AB}$

برابرند، یعنی : $\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\dots$

۶- نتیجه - خطی که موازی با یك ضلع مثلثی رسم شود، دو ضلع دیگر را به یك نسبت تقسیم می‌کند.

هرگاه درمثلث ABC (شکل ۶) خط DE موازی با BC رسم شده باشد، از A خطی موازی باآنها می‌کشیم و می‌بینیم که :

$$\frac{AD}{AE}=\frac{DB}{EC}$$

یا : $$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

ش ۶

۷- تعریف - اگرخطی که موازی بایك ضلع مثلث رسم شده بین این ضلع ورأس مقابل به‌آن باشد، مجموع قطعاتی‌که بر یك ضلع جدا شده‌اند، مساوی‌آن ضلع است؛ دراین صورت می‌گوییم‌که خط، اضلاع مثلث را **به نسبت اضافی** تقسیم‌کرده‌است (خط DE درشکل ۶)؛ وهرگاه این خط امتداد اضلاع مثلث را قطع‌کند، تفاضل قطعاتی‌که بر روی یك ضلع جدا می‌شوند، برابرآن ضلع است؛ دراین‌صورت می‌گوییم‌که‌خط، اضلاع مثلث را **به نسبت نقصانی** تقسیم کرده است.

۸- عکس قضیه در مثلث - **هرگاه در مثلث** ABC (شکل ۷) $\frac{AD}{DB}=\frac{AE_1}{E_1C}$ **باشد،** $DE_1 \parallel BC$ **است.**

ش ۷

برهان - اگر DE_1 موازی با BC

نباشد، از D خطی موازی با BC می‌توان کشید تا AC را مثلاً در E قطع‌کند. در این صورت :

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

چون این تناسب را با فرض قضیه مقایسه‌کنیم، معلوم می‌شود :

$$\frac{AE}{EC}=\frac{AE_1}{E_1C}$$

که پس از ترکیب نسبت در مخرج : $$\frac{AE}{AE+EC}=\frac{AE_1}{AE_1+E_1C}$$

یا : $$\frac{AE}{AC}=\frac{AE_1}{AC}$$

در تناسب اخیر، مخرجها یکی هستند، پس صورتها متساویند؛ یعنی $AE_1=AE$ و در نتیجه E_1 بر E منطبق و DE_1 با BC موازی است.

۹- مسئله - می‌خواهیم پاره‌خط AB را به قطعات متناسب با m، n، p و q تقسیم کنیم.

از نقطهٔ A خط غیر مشخص Ax را می‌کشیم و بر روی‌آن طولهای AC، CD، DE و EF رابترتیب مساوی با m، n، p و q (شکل ۸) (یا متناسب با آنها) جدا می‌کنیم. BF را وصل می‌کنیم واز نقاط E، D و C خطهای EP، DN و CM را موازی با آن می‌کشیم. بنا به **قضیهٔ تالس** داریم :

ش ۸

$$\frac{AM}{m}=\frac{MN}{n}=\frac{NP}{p}=\frac{PB}{q}$$

۱۰ - مسئله - می‌خواهیم چهارمین جزء تناسب بین سه پاره‌خط به طولهای a ، b و c را بسازیم ، یعنی پاره‌خطی بدست‌آوریم که طولش با a ، b و c تناسبی تشکیل دهد .

دو نیم‌خط Ox و Oy (شکل ۹) را رسم می‌کنیم و برروی یکی طولهای OA و OC را بترتیب مساوی a و c و بر روی دیگری طول OB را مساوی b جدا می‌کنیم واز C خطی موازی با AB می‌کشیم تا Ox را در X قطع‌کند . درمثلث OAB خط CX موازی با AB رسم شده است ، بنابراین :

ش ۹

$$\frac{OX}{OB}=\frac{OC}{OA}$$

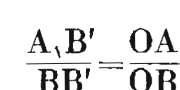
یعنی : $\frac{x}{b}=\frac{c}{a}$

OX طول مطلوب است .

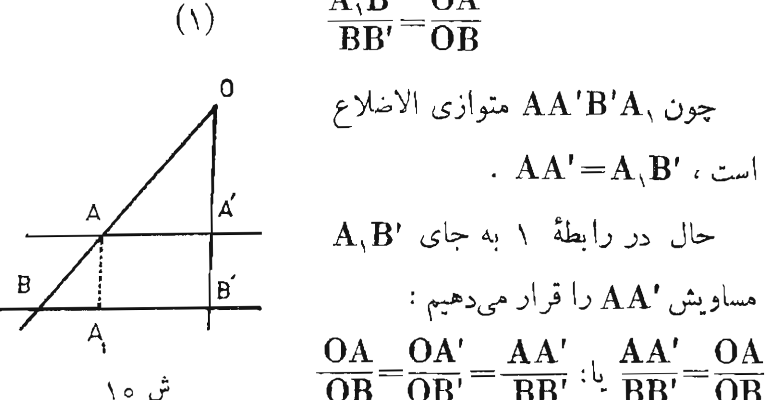
۱۱ - قضیه - هرگاه دو خط متوازی AA' و BB' اضلاع زاویهٔ O را قطع کنند (شکل ۱۰) **این تناسب بر قرار است :**

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OA'}{OB'}=\frac{AA'}{BB'}$$

برهان - AA_1 راهم موازی با OB' رسم می‌کنیم. درمثلث OBB' خط AA_1 موازی با OB' است ، پس :



$$\frac{A_1B'}{BB'}=\frac{OA}{OB} \qquad (1)$$



ش ۱۰

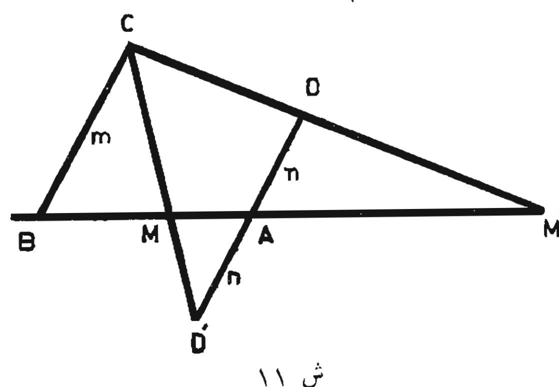
چون $AA'B'A_1$ متوازی الاضلاع است ، $AA'=A_1B'$.

حال در رابطهٔ ۱ به جای A_1B' مساویش AA' را قرار می‌دهیم :

$$\frac{AA'}{BB'}=\frac{OA}{OB} \quad \text{یا :} \quad \frac{OA}{OB}=\frac{OA'}{OB'}=\frac{AA'}{BB'}$$

۱۲ - مسئله - بر روی خطی دو نقطهٔ A و B داده شده‌اند . می‌خواهیم بر روی‌آن خط ، نقطه‌ای پیداکنیم‌که نسبت فاصله‌هایش از A و B مساوی عدد معلوم $\frac{m}{n}$ باشد .

از A و B دو خط متوازی دلخواه می‌کشیم (شکل ۱۱) و برروی یکی طول BC=m و بر روی دیگری در دو طرف A طولهای AD=AD'=n را جدا می‌کنیم واز C به D' (یا به D) وصل می‌کنیم تا AB را در M (یا M') قطع‌کند؛ نسبت به دو متوازی AD و BC و دوقاطع M'B و M'C خواهیم داشت :



ش ۱۱

$$\frac{M'B}{M'A}=\frac{BC}{AD}=\frac{m}{n}$$

همچنین : $$\frac{MB}{MA}=\frac{BC}{AD'}=\frac{m}{n}$$

دو نقطهٔ M و M' نقاط مطلوب هستند .

هرگاه در تناسب $\frac{MB}{MA}=\frac{m}{n}$ در مخرج ترکیب نسبت کنیم ، چنین خواهیم داشت :

$$\frac{MB}{MA+MB}=\frac{m}{m+n} \quad \text{یا} \quad \frac{MB}{AB}=\frac{m}{m+n}$$

MB را از این رابطه بدست می‌آوریم : $MB=\frac{m\cdot AB}{m+n}$. و اگر در تناسب $\frac{M'B}{M'A}=\frac{m}{n}$ تفضیل نسبت درمخرج کنیم و $M'B$ را بدست آوریم، چنین خواهیم داشت : $M'B=\frac{m\cdot AB}{m-n}$.

پس فاصله‌های نقاط M و M' از نقطهٔ B ، طولهای معین زیر هستند : $\frac{m\cdot AB}{m+n}$ و $\frac{m\cdot AB}{m-n}$

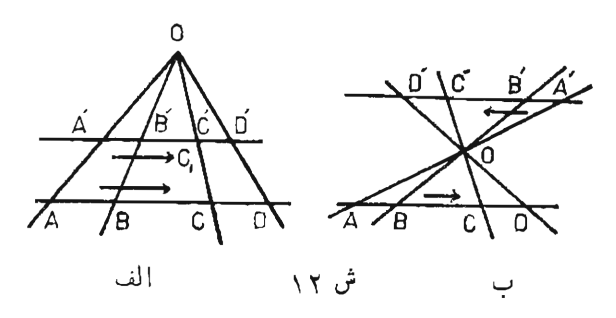
حال اگر امتداد دوخط متوازی را تغییر دهیم و ترسیم را تکرار کنیم ، باز همان دو نقطهٔ M و M' بدست خواهند آمد ؛ زیرا که اگر مثلاً بجای M نقطه‌ای مانند N بدست بیاید وفاصلهٔ N از B راحساب کنیم،طول $\frac{m\cdot AB}{m+n}$ نتیجه می‌شود ، یعنی N و M از B به‌یك فاصله‌اند و در یك طرف آن قرار دارند ، پس N با M یکی‌است . همین استدلال را برای M' می‌توان کرد . بنابرآنچه گفته شد :

۱۳ - قضیه - هرگاه دو نقطهٔ A و B و عددحسابی $\frac{m}{n}$ (کوچکتر

یا بزرگتر ازواحد) داده شده باشند، در روی خط نامحدودی که بر A و B می‌گذرد دو نقطه ، و فقط دونقطه ، می‌توان یافت که نسبت فاصله‌هایشان از A و B مساوی $\frac{m}{n}$ باشد .

۱۴ - قضیه - خطوط متقارب، برروی دوخط متوازی‌قطعات متناظر متناسب جدا می‌کنند .

فرض می‌کنیم که چهار خط متقارب ، دو خط متوازی را بترتیب در A ، B، C، D و A' ، B' ، C'، D' قطع‌کرده‌باشند (شکل۱۲).



ش ۱۲

نسبت به‌دوقاطع OB و OA داریم : $$\frac{A'B'}{AB}=\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB} \qquad (۱)$$

ونسبت به‌دوقاطع OC و OB : $$\frac{B'C'}{BC}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC} \qquad (۲)$$

همچنین خواهیم داشت : $$\frac{C'D'}{CD}=\frac{OC'}{OC}=\frac{OD'}{OD} \qquad (۳)$$

دو تناسب ۱ و۲ درنسبت $\frac{OB'}{OB}$ و دو تناسب ۲ و ۳ در نسبت $\frac{OC'}{OC}$ مشترك هستند ، پس تمام نسبتهای سه تناسب ۱ و ۲ و ۳ با هم مساویند و بخصوص : $$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}$$

توجه کنید ! اگردوخط متوازی یك طرف نقطهٔ تقارب باشند ،

قطعات متناسبی که روی آنها جدا می‌شوند هم‌جهت هستند (شکل ۱۲ الف)؛ واگر نقطهٔ تقارب بین دوخط متوازی واقع شود، قطعات متناسب هم‌جهت نیستند (شکل ۱۲ ب).

۱۵ - قضیهٔ عکس - هرگاه بر روی یکی از دو خط متوازی چند نقطهٔ A و B و C و D و... وبرروی خط‌دیگر، نقاط A' و B' و C' و D' و ... بترتیبی که اسم برده‌ایم قرار داشته باشند و بین قطعات متناظر آنها این تناسب برقرار باشد:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\dots$$

خطهای AA' و BB' و CC' و ... همه بر یك نقطه می‌گذرند.

برهان - اگر قطعات $A'B'$ و $B'C'$ و... با قطعات AB و BC و... در یك جهت باشند، دوخط متوازی در یك طرف نقطهٔ تقارب واقع می‌شوند و هرگاه $A'B'$ و $B'C'$ و ... با AB و BC و ... هم‌جهت نباشند، نقطهٔ تقارب بین دو متوازی می‌افتد.

فرض کنیم‌که دوخط AA' و BB' یکدیگر را در O قطع‌کنند (شکل ۱۲). ثابت می‌کنیم‌که OC بر C' می‌گذرد. درحقیقت اگر OC خط $A'B'$ را درنقطه‌ای مانند C_1 قطع‌کند، لازم می‌آیدکه:

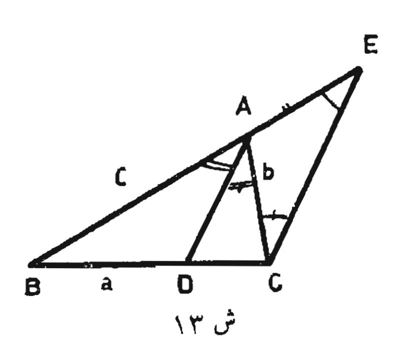
$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C_1}{BC}$$

باشد، یعنی C_1 بر C' منطبق باشد، پس OC بر C' می‌گذرد. به طریق مشابه ثابت می‌شود که OD بر D' مرور می‌کند و ... بنابر این AA' و BB' و ... همه در O متقاربند.

۱۶ - قضیه - نیمساز هر زاویهٔ مثلث، ضلع مقابل را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کند.

(نیمساز زاویهٔ داخلی به **نسبت‌اضافی** تقسیم می‌کند و نیمساز خارجی به **نسبت نقصانی**).

برهان - الف - AD نیمساززاویهٔ داخلی A ضلع مقابل را درD قطع می‌کند (شکل ۱۳). از C خطی موازی بانیمسازADمی‌کشیم تاامتدادAB را درE قطع‌کند. نسبت به دو متوازی AD و EC و مورب AE:



ش ۱۳

(۱) $\widehat{BAD}=\widehat{AEC}$

ونسبت به همان دو متوازی و مورب AC: (۲) $\widehat{DAC}=\widehat{ACE}$

دو طرف اول تساویهای ۱ و ۲ به موجب فرض، متساوی هستند؛ پس: $\widehat{AEC}=\widehat{ACE}$ ودر نتیجه $AC=AE$.

نسبت به دو متوازی AD و EC وموربهای BC و BE داریم:

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AE}$$

اگر به‌جای AE مساویش AC را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}$$

ب - نیمساز زاویهٔ خارجی A ضلع مقابل را در D' قطع می‌کند (شکل ۱۴). از C خطی موازی با این‌نیمساز می‌کشیم تا AB را در E' تلاقی‌کند. بآسانی می‌توان دیدکه:

$$\widehat{B'AD'}=\widehat{AE'C} \qquad (۱)$$

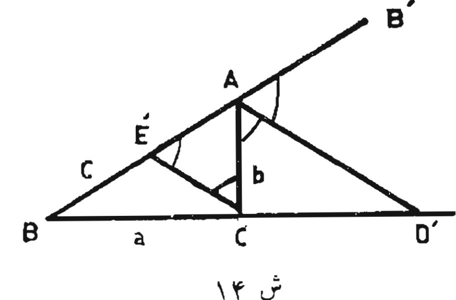
$$\widehat{CAD'}=\widehat{ACE'} \qquad (۲)$$

چون دو طرف اول به فرض متساویند : $\widehat{AE'C}=\widehat{ACE'}$ می‌شود ،

یعنی $AE'=AC$ ؛ اما در مثلث ABD' داریم :

$$\frac{D'B}{D'C}=\frac{AB}{AE'}$$

در مخرج طرف دوم به‌جای AE' مساویش ACرا قرار



ش ۱۴

می‌دهیم :

$$\frac{D'B}{D'C}=\frac{AB}{AC}$$

۱۷ ـ قضیهٔ عکس ـ هرگاه برروی ضلع BC از مثلث ABC دو نقطهٔ D و D' بدست‌آوریم‌که نسبت فواصلشان از دو رأس B و C بر نسبت اضلاع AB و AC باشد ، دو خط AD و AD' نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ A خواهند بود .

ش ۱۵

فرض : $\frac{DB}{DC}=\frac{D'B}{D'C}=\frac{AB}{AC}$ (شکل ۱۵)

حکم : AD و AD' نیمسازهای $\hat{A}$ هستند .

برهان ـ می‌دانیم که نیمسازهای زاویهٔ A ضلع مقابل را در دو نقطه قطع می‌کنند که نسبت فواصلشان از B و C مساوی $\frac{AB}{AC}$ است و

نیزمی‌دانیم‌که برروی خط BC بیشتر ازدونقطه نمی‌توان یافت که نسبت فواصلشان از B و C مساوی $\frac{AB}{AC}$ باشد و D و D' این دونقطه هستند .

پس نیمسازهای $\hat{A}$ بر D و D' می‌گذرند .

۱۸ـ مسئله ـ می‌خواهیم قطعاتی را که نیمساز زاویهٔ داخلی A بر روی ضلع BC از مثلث ABC جدا می‌کند حساب کنیم .

اضلاع مثلث را a و b و c می‌نامیم (شکل ۱۳) ؛ در تناسب $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}$ درمخرج ترکیب نسبت می‌کنیم :

$$\frac{DB}{DB+DC}=\frac{AB}{AB+AC} \quad \text{یا} \quad \frac{DB}{a}=\frac{c}{b+c}$$

پس : $DB=\frac{a\cdot c}{b+c}$ واگر DB را از a تفریق کنیم :

$$DC=\frac{a\cdot b}{b+c}$$

یعنی طول هریك از دو قطعه‌ای که نیمساز زاویهٔ داخلی مثلث روی ضلع مقابل جدا می‌کنند ، مساوی است با حاصل ضرب آن ضلع در ضلع مجاور آن قطعه تقسیم بر مجموع دو ضلع زاویه‌ای که نیمساز آن رسم شده است .

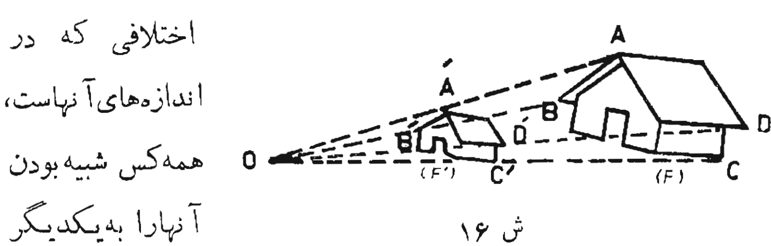
۱۹ـ مسئله ـ مطلوب است محاسبهٔ قطعاتی که نیمساز خارجی زاویهٔ مثلثی برضلع مقابل جدا می‌کند (حل مسئله به عهدهٔ دانش‌آموزان است) ؛ نتیجه چنین خواهد بود :

$$D'C=\frac{a\cdot b}{c-b} \quad \text{و} \quad D'B=\frac{a\cdot c}{c-b} \qquad (\text{شکل ۱۴})$$

تشابه

۲۰ـ موضوع تشابه دو شکل ، آسانتر از آنچه قابل بیان باشد ،

قابل درك است . در شكل ۱۶ دو ساختمان دیده می‌شوند که با وجود اختلافی که در اندازه‌های آنهاست، همه‌کس شبیه بودن آنهارا به‌یکدیگر درك می‌کند .



ش ۱۶

بااندکی توجه دیده می‌شودکه در این دو شکل ، زاویه‌ها عیناً یکی‌است وطول خطهای یکی دو برابرطول همان خطها در دیگری است ؛ خانهٔ سمت راست ، همان خانهٔ سمت چپ است که اندازهٔ طولها درآن **دوبرابر** شده وخانهٔ سمت چپ ، همان خانهٔ سمت راست است که اندازهٔ طولهایش به مقیاس $\frac{1}{2}$ تحویل ، یعنی‌کوچك شده‌است . عددهای ۲ و $\frac{1}{2}$ نسبت بین طولهای خطوط متناظر دوخانه را بیان می‌کنند .

پس می‌توان گفت شکلی مانند (F) مشابه با هر شکل دیگری مانند (F') است ، هرگاه زاویه‌های آنها نظیر بنظیر برابر بوده و اندازه‌های‌خطوط متناظرآنها به نسبت معینی‌کوچك یابزرگ شده‌باشند .

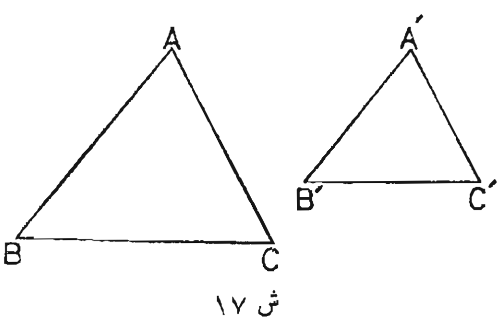
هر دو زاویهٔ متساوی از دو شکل متشابه را زوایای **متناظر** یا **نظیر** وهر دو ضلع یا دو خط از همان دو شکل را ، که باهم متناسبند، دوضلع یا دوخط **متناظر** یا **نظیر** می‌نامند .

مثلثهای متشابه

۲۱-تعریف - دو مثلث مانند ABC و A'B'C' (شکل ۱۷) را متشابه گویند هرگاه زاویه های آنها نظیر بنظیر متساوی و اضلاع آنها نظیر بنظیر باهم متناسب باشند .

یعنی داشته باشیم : $\hat{A}=\hat{A}'$ و $\hat{B}=\hat{B}'$ و $\hat{C}=\hat{C}'$

و $$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$$



ش ۱۷

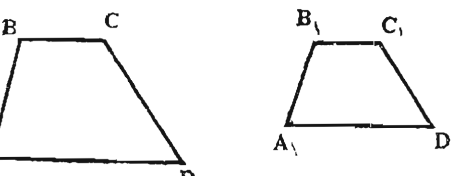
چندضلعیهای متشابه

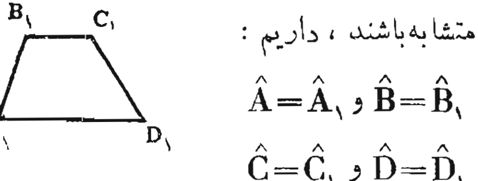
۲۲- تعریف - دو n ضلعی را متشابه می‌نامند اگر زاویه‌های متناظرآنها با هم برابر واضلاع متناظرآنها باهم متناسب باشند .

مثلاً اگر دو چهار ضلعی ABCD و $A_1B_1C_1D_1$ (شکل ۱۸) متشابه‌باشند ، داریم :

$\hat{A}=\hat{A}_1$ و $\hat{B}=\hat{B}_1$

$\hat{C}=\hat{C}_1$ و $\hat{D}=\hat{D}_1$





ش ۱۸

و $$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{D_1A_1}{DA}$$

در دو مثلث متشابه (بطورکلی در دو nضلعی متشابه) نسبت هردو ضلع متناظر* را **نسبت تشابه** دوشکل می‌گویند .

(*) چون مثلث سه ضلع دارد ، دوضلع نظیرازدومثلث ، علاوه‌برآنکه بین **دوزاویهٔ متساوی** نظیرهم هستند ، روبروی زاویه‌های متساوی نظیرهم نیز قرار دارند .

نتیجه- دوشکل مشابه با یك شکل ، با یکدیگر مشابهند .

حالات تشابه دو مثلث - همانطور که برای تساوی دو مثلث کافی است که فقط سه جزء از شش جزء آنها (که لااقل یکی از آنها ضلع باشد) متساوی شوند ، برای تشابه دومثلث نیزتحقق برخی‌ازشرایط لازم برای متشابه بودن ، کفایت می‌کند .

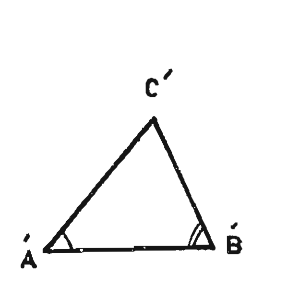
دومثلث درسه‌حالت متشابهند : الف ـ وقتی که دو زاویهٔ یکی با دو زاویهٔ دیگری برابر باشند . ب ـ وقتی که یك زاویهٔ یکی با یك زاویهٔ دیگری برابر واضلاع آن زاویه‌ها متناسب باشند. ج ـ وقتی‌که سه ضلع یکی باسه ضلع دیگری متناسب باشند .

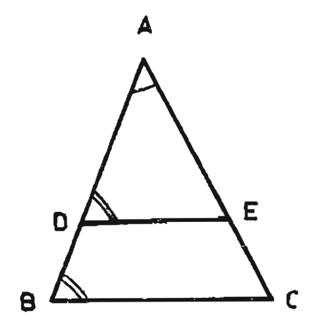
۲۳- حالت اول - قضیه - هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند ، دو مثلث متشابهند .

فرض : $\hat{A}'=\hat{A}$ و $\hat{B}'=\hat{B}$ (شکل ۱۹)

حکم : $\hat{C}'=\hat{C}$ و $\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'A'}{CA}$

برهان - مساوی بودن $\hat{C}'$ و $\hat{C}$ بدیهی است ؛ زیرا که درهرمثلث مجموع زاویه‌ها دوقائمه است ووقتی‌که دو زاویه ازمثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابرشدند ، زاویه‌های سومشان هم متساوی می‌شوند . برای





ش ۱۹

اثبات تناسب اضلاع ، بر روی AB طول AD را مساوی A'B' جدا می‌کنیم و DE را موازی با BC می‌کشیم تا AC را در E قطع کند . دو مثلث ADE و A'B'C' به‌حالت زض‌ز متساویند و $AE=A'C'$.

می‌دانیم که : $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

چون به جای صورتهای سه کسر مساویهایشان ، یعنی اضلاع مثلث A'B'C' را قرار دهیم :

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$$

۲۴- حالت دوم - قضیه - هرگاه یك زاویهٔ مثلثی با یك زاویه از مثلث دیگر مساوی باشد و اضلاع آن دو زاویه متناسب باشند ، دو مثلث متشابهند .

فرض : $\hat{C}=\hat{C}'$ و $\frac{C'A'}{CA}=\frac{C'B'}{CB}$ (شکل ۲۰)

حکم : $\hat{B}=\hat{B}'$ و $\hat{A}=\hat{A}'$ و $\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}$

برهان - برروی CA و CB طولهای CP و CQ را بترتیب مساوی C'A' و C'B' جدا می‌کنیم. دومثلث CPQ و A'B'C' به حالت ض ز ض متساویند و $\hat{P}=\hat{A}'$ و $\hat{Q}=\hat{B}'$. اما از تناسب $\frac{CP}{CA}=\frac{CQ}{CB}$ (فرض قضیه که درآن به‌جای C'A' و C'B' مساویهایشان را گذاشته‌ایم) نتیجه می‌گیریم که PQ با AB موازی است . پس :

ش ۲۰

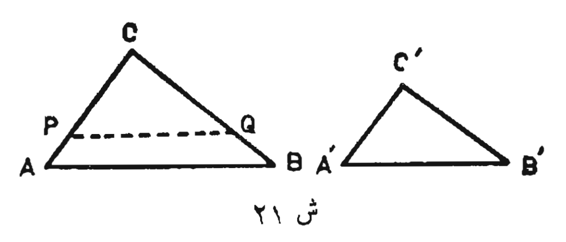
$\hat{A}=\hat{P}$ و $\hat{B}=\hat{Q}$. به‌جای $\hat{P}$ و $\hat{Q}$ مساویهایشان $\hat{A}'$ و $\hat{B}'$ را می - گذاریم : $\hat{A}'=\hat{A}$ و $\hat{B}'=\hat{B}$ ؛ پس دومثلث ، بنا به‌حالت اول ، متشابه هستند و در نتیجه :

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}$$

۲۵ - حالت سوم - قضیه - هرگاه سه ضلع مثلثی با سه ضلع مثلث دیگر متناسب باشند ، دو مثلث متشابهند .

فرض : $\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}$ (شکل ۲۱)

حکم : $\hat{A}'=\hat{A}$ ، $\hat{B}'=\hat{B}$ ، $\hat{C}'=\hat{C}$



ش ۲۱

برهان - طولهای CP و CQ را بترتیب مساوی C'A' و C'B' جدا کرده وخط PQ را می‌کشیم . چون در مثلث CPQ و CAB ، بنا به حالت دوم ، متشابهند :

$$\frac{CP}{CA}=\frac{CQ}{CB}=\frac{PQ}{AB} \qquad (۱)$$

وبا توجه به تساوی C'B' با CQ وهمچنین C'A' با CP ، فرض قضیه چنین می‌شود :

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{CQ}{BC}=\frac{CP}{AC} \qquad (۲)$$

از مقایسهٔ تناسبهای (۱) و(۲) نتیجه می‌گیریم که $\frac{PQ}{AB}=\frac{A'B'}{AB}$ ،پس

$PQ=A'B'$ و دو مثلث A'B'C' و CPQ به حالت ض‌ض‌ض متساوی می‌شوند . اما دیدیم که CPQ مشابه با ABC است ؛ پس A'B'C' و ABC نیز متشابهند .

۲۶ - قضیه - در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر، مثلث را به دو مثلث تجزیه می‌کندکه هریك بامثلث اصلی ، وهردو بایکدیگر، مشابهند .

برهان - در مثلث قائم الزاویهٔ ABC (شکل ۲۲) قائمه در رأس A ، ارتفاع AD دومثلث قائم‌الزاویهٔ ABD و ACD بوجودآورده است .

ش ۲۲

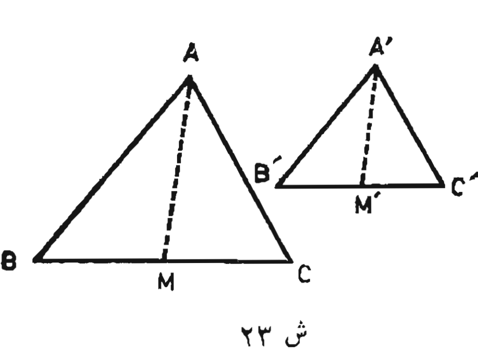
الف ـ ABD~ABC زیرا که زاویهٔ B درهردو مشترك است وهر كدام يك زاویهٔ قائمه دارند .

ب ـ ACD~ABC به دلیل آنکه زاویهٔ C در هر دو مشترك است وهرکدام يك زاویهٔ قائمه دارند .

ج ـ ABD~ACD است زیرا که هردو با ABC مشابهند .

۲۷ - قضیه - در دو مثلث متشابه ، همهٔ اجزای فرعی متناظر (ارتفاعها، میانه‌ها، نیمسازها، شعاعهای دوایر محیطی و محاطی...) برنسبت اضلاع متناظرند .

برهان - اگر هريك‌ازخطوط فرعی متناظر دو مثلث را رسم کنیم ، مثلثهایی متشابه بوجود می - آیند . مثلاً اگر



ش ۲۳

میانه‌های AM و A´M´ را رسم کنیم (شکل ۲۳) ، دو مثلث ACM و A´C´M´ به‌حالت دوم متشابهند .

$$\left(\frac{C'M'}{CM}=\frac{A'C'}{AC} \text{ و } \hat{C}'=\hat{C}\right)$$

و در نتیجه :

$$\frac{A'M'}{AM}=\frac{A'C'}{AC}$$

اگر دو نیمساز AD و A'D' را رسم کنیم ، دو مثلث ABD و A'B'D' (شکل ۲۴) به حالت اول متشابه می‌شوند ($\alpha=\alpha'$ و $\hat{B}'=\hat{B}$) همچنین‌است اگر دوارتفاع را رسم کنیم .

پس به هر حال ، مثلثهای متشابهی بوجود می‌آیند که لااقل یك ضلعشان بامثلثهای اصلی مشترك است .

ش ۲۴

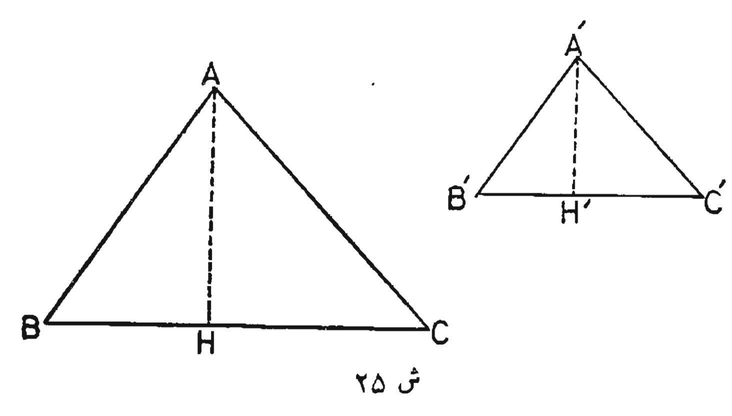
بنا براین اجزایشان برنسبت اضلاع آن دو مثلث می‌باشند .

۲۸ ـ قضیه ـ در دو مثلث متشابه ، مساحتها بر نسبت مربعات هر دو ضلع متناظرند .

فرض : $A'B'C' \sim ABC$ (شکل ۲۵)

حکم : $$\frac{S'}{S}=\frac{B'C'^2}{BC^2}$$

(S' مساحت A´B´C´ و S مساحت ABC است)



ش ۲۵

برهان ـ ارتفاعهای AH و A'H' را رسم می‌کنیم و درنظر می‌گیریم‌که :

$$\frac{A'H'}{AH}=\frac{B'C'}{BC} \qquad (1)$$

حال می‌نویسیم :

$$S'=\frac{1}{2}B'C'\cdot A'H' \qquad (2)$$

و

$$S=\frac{1}{2}BC\cdot AH \qquad (3)$$

و پس ازآنکه رابطهٔ (۲) را بر رابطهٔ (۳) عضوبعضو تقسیم‌کنیم :

$$\frac{S'}{S}=\frac{B'C'}{BC}\times\frac{A'H'}{AH} \qquad (4)$$

و چون در رابطهٔ (۴) با توجه به رابطهٔ (۱) به جای $\frac{A'H'}{AH}$ مساویش $\frac{B'C'}{BC}$ را قرار دهیم :

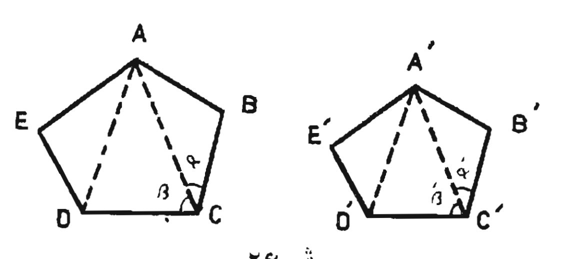
$$\frac{S'}{S}=\frac{B'C'}{BC}\times\frac{B'C'}{BC}=\frac{B'C'^2}{BC^2}$$

۲۹ـ قضیه ـ دو چندضلعی متشابه را همیشه می‌توان به یك عده مثلثهای متشابه که به وضعی مشابه پهلوی یکدیگر قرار گرفته باشند ، تجزیه کرد .

برهان ـ دو چندضلعی متشابه ABCDE و A'B'C'D'E'

(شکل ۲۶) مفروضند . از A و A' رئوس دو زاویهٔ متناظر ، اقطار را رسم می‌کنیم .

دومثلث ABC و $A'B'C'$ (به‌حالت دوم) متشابهند. پس $\hat{\alpha}=\hat{\alpha}'$



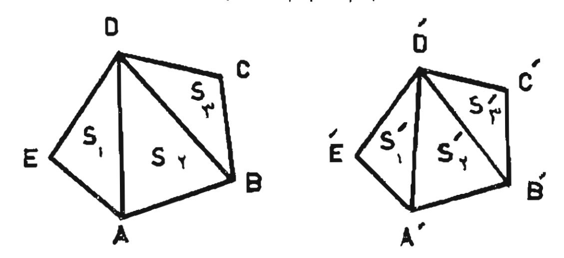
ش ۲۶

است ، و در نتیجه $\hat{\beta}=\hat{\beta}'$ می‌شود و دو مثلث ACD و $A'C'D'$ نیز (به حالت دوم) متشابه می‌شوند . به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که مثلثهای حادث دردو چندضلعی دو بدو متشابهند و پهلوی مثلثهای متشابه دیگر، باوضعی مشابه ، قرارگرفته‌اند .

۳۰- قضیه - در دو چندضلعی متشابه ، مساحتها برنسبت مربعات هر دو ضلع متناظرند .

برهان - دو چندضلعی متشابه $ABCDE$ و $A'B'C'D'E'$ (شکل ۲۷) به مساحتهای S و S' را به مثلثهای متشابه تجزیه می‌کنیم ومساحت مثلثها را S_1 ، S_2 و ... و S'_1 ، S'_2 و ... می‌نامیم .

$$S'=S'_1+S'_2+S'_3+\cdots$$
$$S=S_1+S_2+S_3+\cdots$$



ش ۲۷

اگرنسبت تشابه دو شکل را k بنامیم ، $\frac{A'B'}{AB}=k$ باشد ،چنین خواهیم داشت :

$$\frac{S'_1}{S_1}=k^2 \quad و \quad \frac{S'_2}{S_2}=k^2 \quad و \ldots$$

$$k^2=\frac{S'_1}{S_1}=\frac{S'_2}{S_2}=\frac{S'_3}{S_3}=\cdots=\frac{S'_1+S'_2+S'_3+\cdots}{S_1+S_2+S_3+\cdots}=\frac{S'}{S}$$

واز آنجا : $\frac{S'}{S}=\frac{A'B'^2}{AB^2}$

خلاصهٔ مطالب مهم :

۱- نسبت دو پاره‌خط ، نسبت اندازه‌های آنهاست وقتی که هر دو را با یك واحد اندازه گرفته باشیم .

۲- اگرچهارپاره‌خط AB و CD و EF و GH بقسمی‌مفروض باشند که‌دونسبت $\frac{AB}{CD}$ و $\frac{EF}{GH}$ متساوی باشند ، تساوی $\frac{AB}{CD}=\frac{EF}{GH}$ رایك تناسب و چهار قطعه‌خط AB و CD و EF و GH را متناسب و هر یك از آنها را چهارم جزء تناسب بین سه قطعهٔ دیگر می‌نامند . در هرتناسب ، دو جزء اول و چهارم را طرفین و دوجزء دوم وسوم را وسطین تناسب می‌خوانند .

۳- هرگاه‌چند متوازی دوخط را قطع‌کنند وبرروی‌یکی‌قطعات متساوی جداکنند ، برروی دیگری هم‌قطعات متساوی جدا می‌کنند .

۴- قضیهٔ تالس - هرگاه چند خط متوازی دوخط را قطع‌کنند ،برروی آنها قطعات متناسب بوجود می‌آورند .

۵- خطی که به موازات یك ضلع مثلث رسم شود ، دو ضلع دیگررا به یك‌نسبت تقسیم می‌کند وبعکس .

۶- هرخط به موازات یك ضلع مثلث رسم شود ، با دوضلع دیگرمثلثی ایجاد می‌کند که اضلاعش بااضلاع مثلث اول متناسبند .

۷- هرگاه دونقطهٔ A و B معلوم باشند ، بر روی خط نامحدود AB فقط دونقطه می‌توان یافت‌که نسبت فواصلشان از A و B مساوی $\frac{m}{n}$ باشد .

۸- خطوط متقارب، برروی دوخط متوازی قطعات متناسب جدا می‌کنند.

۹- هرگاه برروی یکی ازدوخط متوازی ، نقاط A و B و C و... و بر روی خط دیگر نقاط A' و B' و C' و ... قسمی قرار داشته باشند که $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\dots$ باشند، خطوط AA' و BB' و CC' و... متقاربند.

۱۰ - نیمساز هر زاویهٔ مثلث ، ضلع مقابل را بر نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کند .

۱۱- هرگاه برروی ضلع BC از مثلث ABC نقاط D و D' قسمی باشندکه نسبت فواصلشان از B و C برابر نسبت اضلاع AB و AC باشد ، خطوط AD و AD' نیمسازهای زاویهٔ A ازمثلث می‌باشند .

۱۲- دومثلث یا بطورکلی دوچندضلعی را متشابه‌گویند، هرگاه زاویه‌های آنها نظیربنظیر باهم مساوی واضلاع آنها نظیربنظیرمتناسب باشند .

۱۳- هرگاه دوزاویه ازمثلثی با دوزاویه ازمثلثی دیگر برابر باشند ، دومثلث متشابهند .

۱۴ - هرگاه یك زاویه از مثلثی با یك زاویه از مثلثی دیگر مساوی و اضلاع‌آن دوزاویه متناسب‌باشند ، دومثلث متشابهند .

۱۵- هرگاه سه ضلع مثلثی باسه ضلع مثلث دیگرمتناسب‌باشند، دومثلث متشابهند :

۱۶- دردو مثلث متشابه، همهٔ اجزای فرعی متناظر(ارتفاعها، میانه‌ها، نیمسازهای زوایای نظیر ، شعاعهای دوایر محیطی و محاطی و ...) بر نسبت اضلاع متناظرند .

۱۷- دردومثلث متشابه(یادو چندضلعی‌متشابه) مساحتها برنسبت مربعات هردوضلع متناظرند .

۱۸- اقطارمتناظردو چندضلعی‌متشابه ، بااضلاع نظیر، مثلثهای متناظر متشابه تشکیل می‌دهند .

تمرین

۱- برخط راستی سه نقطهٔ A ، M و B داده شده است. نقطهٔ M' را بدست‌آورید بقسمی‌که نسبت فواصلش‌از A و B مساوی $\frac{MA}{MB}$ باشد .

۲- نقاط B و M برروی خطی داده شده‌است . نقطهٔ A راچنان تعیین کنیدکه نقطهٔ مفروض M پاره‌خط AB را به‌نسبت k تقسیم‌کند .

۳ - m واسطهٔ هندسی بین دوقطعهٔ a و b ، و a یکی‌ازقطعات دردست است . b را بدست آورید .

۴ - دوخط ثابت d_1 و d_2 باهم موازیند . خط تغییرپذیر d آنهارا در A و B قطع می‌کند . مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ M از خط d بقسمی‌که $\frac{MA}{MB}$ مساوی m شود .

۵- از دو انتهای قطعه‌خط AB قطعات‌متوازی AM و BN را دردو جهت متخالف می‌کشیم . ثابت کنیدکه MN پاره‌خط AB را به‌نسبت $\frac{AM}{BN}$ تقسیم می‌کند.

۶- درهرذوزنقه ، محل تلاقی دوقطر و نقطهٔ تلاقی دوساق و اوساط دو قاعده بر یك استقامتند .

۷- فواصل‌هر نقطهٔ واقع برمیانهٔ مثلث ازدوضلع مجاور، برنسبت عکس این اضلاع است .

۸- در دو چندضلعی‌متشابه که هردو ضلع متناظرشان متوازی باشند ، خطوط واصل بین رأسهای متناظر ، متقاربند .

۹- پاره‌خط a معلوم‌است. اولاً تساوی $x=a^2$ را به‌یك تناسب تبدیل کنید . ثانیاً پاره‌خط x را رسم‌کنید .

۱۰ - سه پاره‌خط a ، b و c مفروضند. پاره‌خطی بدست آورید بقسمی که $\frac{x}{a}=\frac{b^2}{c^2}$ باشد .

۱۱- دو مثلث متساوی‌الساقین که زاویه‌های رأسشان متساوی باشند ، متشابهند .

۱۲- دو مثلث متساوی‌الساقین که زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ آنها متساوی باشد ، متشابهند .

۱۳- از مثلثی ضلع AC و M محل‌تلاقی نیمساززاویهٔ داخلی با AC و طول نیمساز زاویهٔ ABC در دست است . مثلث را بسازید . و اضافی M′ نقطهٔ تلاقی نیمساز خارجی را با AC بدست‌آورید .

۱۴- ازمثلثی رأس A و Ax امتداد ضلع AB و M و M' نقاط تلاقی نیمسازهای رأس C با AB دردست است . رأس B را بدست آورید . آیا رأس C را هم می‌توان بدست آورد ؟ چه شرایطی برای این کار لازم است ؟

۱۵- در چندضلعیهای متشابه نیمسازهای زاویه‌های داخلی که به اضلاع محدود شوند ، بر نسبت اضلاعند .

۱۶- در ذوزنقهٔ $ABCD$ نقطهٔ E را برساق AD چنان اختیارمی‌کنیم که $\frac{EA}{ED}=\frac{m}{n}$ شود . از E خطی موازی باقاعده‌ها می‌کشیم تاساق دیگر را در F قطع کند. ثابت کنید که $EF=\frac{n \cdot AB+m \cdot CD}{m+n}$.

۱۷- مماس مشترك (داخلی یا خارجی) دو دایره ، خط المرکزین را به نسبت دوشعاع تقسیم می‌کند .

۱۸ - هرگاه از مرکزهای دو دایره دو شعاع متوازی (در یك جهت یا در دو جهت مخالف) رسم کنیم ، خطی که انتهای این دو شعاع را به هم وصل کند برمحل تقاطع خطالمرکزین با مماس مشترك (خارجی یا داخلی) می‌گذرد .

۱۹- دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم‌کنید . دایرهٔ دیگری‌که در A بر آن دایره مماس شود ، دو ضلع دیگر یا امتدادشان را در B' و C' قطع می‌کند . ثابت‌کنید که :

مثلث $ABC \sim$ مثلث $AB'C'$

۲۰- ارتفاعهای مثلث بر نسبت عکس اضلاع متناظرند .

۲۱- هرگاه دو دایره مماس داخلی باشند ، دایرهٔ کوچکتر وترهای دایرهٔ بزرگتررا که برنقطهٔ تماس بگذرند ، بهیك نسبت قطع می‌کند .

۲۲- B و b و h دو قاعده و ارتفاع ذوزنقه‌ای داده شده‌اند ؛ ارتفاع مثلثهایی را که ازتلاقی دوساق ذوزنقه وقاعده‌های آن بوجود می‌آیند ، بدست آورید .

۲۳- دایرهٔ C وخط d مفروضند . برنقطهٔ مفروض M خطی بگذرانید که C و d را قطع کند و در M به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم شود . مثال عددی :

$\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$ و $\frac{m}{n}=\frac{2}{3}$.

۲۴- سه نقطهٔ M ، N و P داده شده‌اند . بر M خطی بگذرانید که نسبت فاصله‌های N و P از آن مساوی h شود. مثال‌عددی: $h=3$، $h=\frac{2}{5}$.

۲۵- سه نقطهٔ A ، B و C داده شده‌اند ؛ خطی مانند d رسم کنیدکه اگر عمودهای AA' و BB' و CC' را بر آن فرودآوریم ، $\frac{AA'}{BB'}=\frac{m}{n}$ و $\frac{BB'}{CC'}=\frac{n}{r}$ شود .

۲۶- از نقطهٔ M واقع در درون زاویه‌ای خطی بگذرانید که دو ضلع زاویه را قطع‌کند ودر M به نسبت $\frac{a}{b}$ تقسیم شود .

۲۷ - سه خط متقارب d_1 ، d_2 و d_3 مفروضند . از نقطهٔ مفروض M خطی مروردهیدکه اگر d_1 ، d_2 و d_3 را بترتیب در A ، B و C قطع‌کند، $\frac{AB}{CB}=\frac{m}{n}$ شود .

۲۸- چهارخط d_1 ، d_2 ، d_3 و d_4 داده شده‌اند . خطی موازی‌با d_4 رسم کنیدکه سه‌خط دیگررا قطع کند وبه نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم شود .

۲۹ - مثلث ABC وخط Ax در خارج مثلث داده شده است . خطی چنان رسم‌کنیدکه Ax واضلاع مثلث (یا امتدادآنها) را در نقاط M ، N ، P و Q قطع کند و $MN=NP=PQ$ شود.

۳۰ - سه خط d_1 ، d_2 و d_3 داده شده‌اند . بر d_1 نقطه‌ای مانند M تعیین کنید که نسبت فواصلش از d_2 و d_3 مساوی m باشد .

۳۱- نظیر مسئلهٔ بالا وقتی که به جای d_1 دایرهٔ O داده شده باشد .

۳۲- از مثلثی سه ارتفاع h_a و h_b و h_c داده شده‌اند . مثلث را بسازید .

راهنمایی - با استفاده از $\frac{h_a}{h_b}=\frac{b}{a}$ و $\frac{h_a}{h_c}=\frac{c}{a}$ مثلثی مشابه با

مثلث مطلوب می‌سازید و بعد مثلث اصلی را بدست می‌آورید .

۳۳- نقطهٔ تلاقی دو خط در خارج از حدود شکل است ؛ بر نقطهٔ مفروض M خطی بگذرانید که بر محل تلاقی آنها بگذرد .

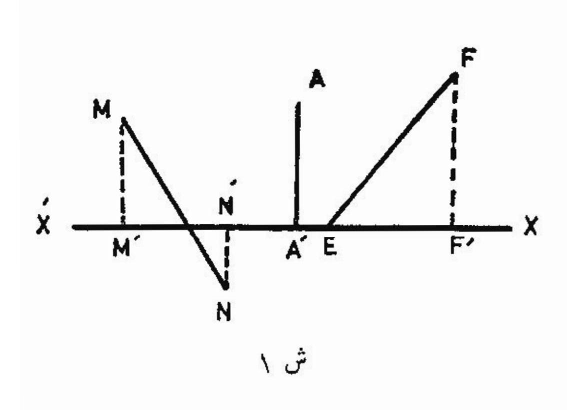
۳۴- نقطهٔ تلاقی دو خط در خارج حدود شکل است ؛ خطی موازی با خط معینی رسم کنید که بر محل تلاقی آنها بگذرد .

راهنمایی - از یك نقطهٔ واقع بر یکی از دو خط مفروض ، خطی موازی با خط معین رسم کنید ؛ متوازی‌الاضلاع دلخواهی بسازید که قطرش بر این خط واقع شود و اضلاعش موازی با دو خط مفروض باشند ؛ قطر دیگر، دو خط را قطع می‌کند ، از آن برای حل مسئله استفاده کنید .

فصل پانزدهم

روابط طولی

۱- تصویر- تصویر هر نقطه بر یك خط ، پای عمودی است که از آن نقطه بر آن خط فرود آید .



ش ۱

در شکل ۱ ، A' تصویر A بر خط $x'x$ است . تصویر هر نقطه مانند E که روی خط واقع باشد ، بر خود آن نقطه منطبق است .

تصویر هر پاره‌خط بریك خط نامحدود ، پاره‌خطی است که دو سرش تصویرهای دو سر پاره‌خط مذکور باشند .

درشکل ۱ ، $M'N'$ تصویر MN و EF' تصویر EF برخط $x'x$ است .

۲- روابط طولی ـ تا کنون رابطه های متعدد بین اجزای مثلث ، یاشکلهای دیگر، آموخته‌اید ؛ بسیاری ازاین‌روابط ، بستگی با طول اجزای شکل ندارند . مثلاً بین متقارب بودن سه میانه ، یا سه نیمساز یاسه ارتفاع مثلث وطولهای این‌خطوط ، ارتباطی‌نیست؛ اینگونه روابط را روابط غیر طولی می‌گویند . بعضی روابط که بستگی با طول اجزای شکل دارند ، **روابط طولی** یا **روابط متری** نامیده می‌شوند .

۳ـ قضیه ـ هرگاه دو وتر یکدیگر را در داخل دایره قطع کنند، حاصل‌ضرب دو قطعهٔ یکی مساوی است با حاصل‌ضرب دو قطعهٔ دیگری.

فرض: BC و DE در A متقاطعند (شکل ۲).

حکم: $AB \times AC = AD \times AE$

برهان ـ از C به D و از B به E وصل می‌کنیم:

ش ۲

$\Delta\, ACD \sim \Delta\, ABE$ (زیرا که $\hat{C}=\hat{E}$ و $\hat{A}=\hat{A}$).

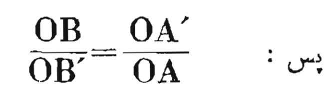
پس:
$$\frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AC}$$

یعنی:
$$AB \times AC = AD \times AE$$

۴ ـ تعریف ـ هرگاه از نقطهٔ خارج دایره‌ای خطی رسم کنیم تا دایره را در دو نقطه قطع کند، جزء محدود بین آن نقطه و هریك از نقاط تقاطع را **یك قطعهٔ** آن خط قاطع می‌نامند. در شکل ۳، OA و OB دو قطعهٔ قاطع OA، و OA' و OB' دو قطعهٔ قاطع OA' هستند.

۵ـ قضیه ـ هرگاه از نقطهٔ O واقع در خارج دایره‌ای دو خط رسم کنیم تا دایره را قطع کنند، حاصل‌ضرب دو قطعهٔ یك قاطع مساوی است با حاصل‌ضرب دو قطعهٔ قاطع دیگر.

برهان ـ برای اثبات $OA \cdot OB = OA' \cdot OB'$ (شکل ۳)، از A و A' بترتیب به B' و B وصل می‌کنیم؛ $\Delta OAB' \sim \Delta OBA'$ (زیرا که $\hat{O}$ در هردو مشترك و $\hat{B}=\hat{B'}$ است).



پس:
$$\frac{OB}{OB'}=\frac{OA'}{OA}$$

یا:
$$OA \cdot OB = OA' \cdot OB'$$

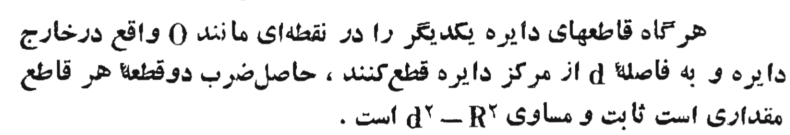
ش ۳

هرگاه یکی از قاطعها بر C، مرکز دایره، بگذرد (شکل ۴) وفاصلهٔ O از مرکز دایره را d وشعاع دایره را R بنامیم:

$$OM \cdot OM' = OA \cdot OB = (d-R)(d+R) = d^2 - R^2$$

ش ۴

بنابراین:



هرگاه قاطعهای دایره یکدیگر را در نقطه‌ای مانند O واقع درخارج دایره و به فاصلهٔ d از مرکز دایره قطع‌کنند، حاصل‌ضرب دوقطعهٔ هر قاطع مقداری است ثابت و مساوی $d^2 - R^2$ است.

۶ـ نتیجه ـ مربع مماسی که از نقطهٔ O بر دایره رسم شود مساوی است با $d^2 - R^2$.

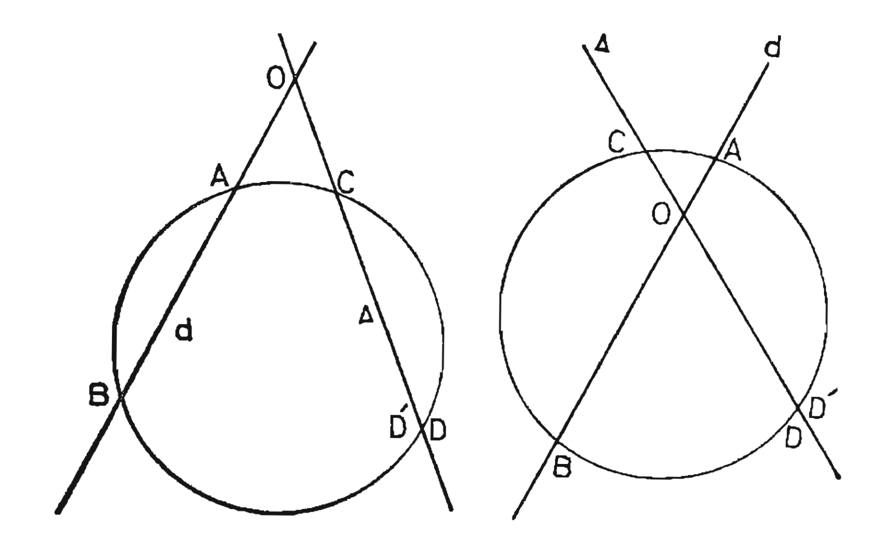
در حقیقت مماس بر دایره، مثلاً OT (شکل ۴)، حد قاطع OMM' است وقتی که در نتیجهٔ دوران قاطع در حول نقطهٔ O، نقاط تقاطع M و M' آنقدر به هم نزدیك شده تا بر یکدیگر منطبق شده باشند، پس:

$$OT^2 = OM \cdot OM' = d^2 - R^2$$

(اثبات مستقیم نتیجه، از روی مثلث قائم الزاویهٔ OTC بر عهدهٔ دانش‌آموزان است).

۷ـ عکس قضیهٔ ۳ و ۵ ـ هرگاه دو خط راست d و Δ یکدیگر را

در نقطه‌ای مانند O قطع کنند و دو نقطهٔ A و B را روی یکی و دو نقطهٔ C و D را روی دیگری باشرایط یکسانی طوری اختیار کنیم که $OA\cdot OB = OC\cdot OD$ باشد، چهار نقطهٔ A و B و C و D روی محیط یك دایره قرار دارند (شکل ۵).



ش ۵

برهان ــ بر سه نقطهٔ A و B و C یك دایره می‌گذرانیم.

اگر این دایره از D گذشت حکم ثابت است و گرنه Δ را در نقطهٔ دیگری مانند D' قطع می‌کند و نظر به قضایای شمارهٔ ۳ و ۵ داریم:

$$OA\cdot OB = OC\cdot OD'$$

پس با توجه به فرض $OD' = OD$ و از آنجا با شرایط یکسانی که در انتخاب نقاط روی d و Δ منظور شده است بآسانی می‌توان نتیجه گرفت که D' بر D منطبق است یعنی دایرهٔ ABC از D نیز می‌گذرد.

۸ـ قضیه ـ هرگاه دو خط راست d و Δ یکدیگر را در نقطه‌ای مانند O قطع کنند و روی یکی نقطهٔ A و روی دیگری دو نقطهٔ B و C را

در یك طرف O طوری اختیار کنیم که $OA^2 = OB\cdot OC$ باشد، دایره‌ای که بر سه نقطهٔ A و B و C می‌گذرد، در A بر خط OA مماس است.

برهان ــ زیرا اگر دایرهٔ ABC در A بر OA مماس نباشد، آن‌را درنقطهٔ دیگری مانند A' قطع می‌کند وداریم: $OA\cdot OA' = OB\cdot OC$ (توجه‌کنید چون O خارج دایره است، A و A' در یك طرف O قرار می‌گیرند.) حال با ملاحظهٔ فرض قضیه نتیجه می‌شود:

$$OA^2 = OA\cdot OA' \quad \text{یا} \quad OA = OA'$$

یعنی A' بر A منطبق است. (شکل را رسم کنید)

روابط طولی در مثلث

۹ ــ بین اجزای مثلث رابطه‌های طولی بسیار می‌توان یافت. مهمترین آنها، پنج رابطه است؛ سه رابطه در مثلث قائم الزاویه و دو رابطه در مثلثهای دیگر. روابط دیگر را با استفاده از این پنج رابطهٔ اصلی بدست خواهیم آورد.

۱۰ـ رابطهٔ اول ـ قضیه ـ در مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بر وتر واسطهٔ هندسی است بین دو قطعه‌ای که ارتفاع از وتر جدا می‌کند.

برهان ــ چون AD ارتفاع وارد بروتررا در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC (شکل ۶) رسم کنیم، $\Delta ABD \sim \Delta ACD$ ؛ پس:

ش ۶

$$\frac{BD\ (\text{از مثلث } ABD)}{AD\ (\text{از مثلث } ADC)} = \frac{AD\ (\text{از مثلث } ABD)}{DC\ (\text{از مثلث } ADC)}$$

بنابراین: $AD^2 = BD\cdot DC$

۱۱ - رابطهٔ دوم - قضیه - در مثلث قائم الزاویه هر ضلع واسطهٔ هندسی است بین وتر و تصویر همان ضلع بر وتر .

برهان - الف - $\triangle ABD \sim \triangle ABC$ (شکل ۶) .

پس :

$$\frac{AB\ (\text{از مثلث } ABC)}{DB\ (\text{از مثلث } ABD)} = \frac{BC\ (\text{از مثلث } ABC)}{AB\ (\text{از مثلث } ABD)}$$

بنابراین : $AB^2 = BC \cdot BD$ (۱)

ب - $\triangle ACD \sim \triangle ABC$

پس :

$$\frac{AC\ (\text{از مثلث } ACD)}{BC\ (\text{از مثلث } ABC)} = \frac{DC\ (\text{از مثلث } ACD)}{AC\ (\text{از مثلث } ABC)}$$

بنابراین : $AC^2 = BC \cdot DC$ (۲)

۱۲- رابطهٔ سوم (رابطهٔ فیثاغورث) - قضیه - در هر مثلث قائم‌الزاویه مجذور وتر مساوی است با مجموع مجذورهای دوضلع .

هرگاه روابط ۱ و ۲ قضیهٔ پیشین را بنویسیم :

$AB^2 = BC \cdot BD$ (۱)

$AC^2 = BC \cdot CD$ (۲)

و با هم جمع کنیم :

$$AB^2 + AC^2 = BC \cdot BD + BC \cdot CD$$
$$= BC(BD + DC) = BC \cdot BC = BC^2$$

یعنی : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (۳)

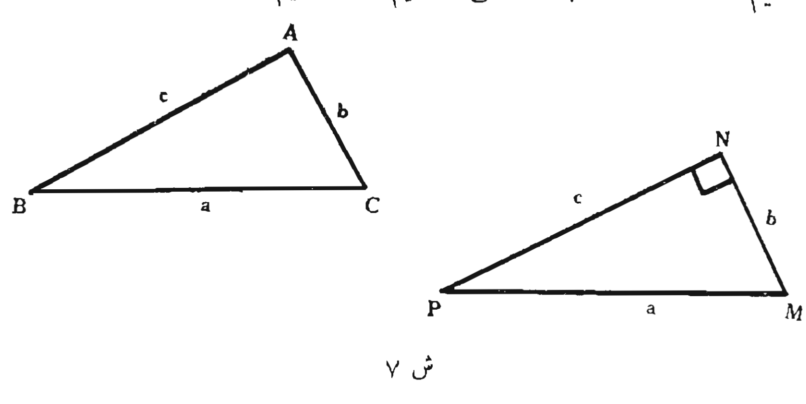
اگر در رابطهٔ ۳ یکی از دو جملهٔ AB^2 یا AC^2 را به‌طرف اول ببریم ، به این نتیجه می‌رسیم که :

در مثلث قائم‌الزاویه مجذور هر ضلع مساوی است با مجذور وتر منهای مجذور ضلع دیگر .

۱۳ - عکس قضیهٔ فیثاغورث - هرگاه در مثلثی مربع یك ضلع،

برابر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر باشد ، آن مثلث قائم الزاویه است .

برهان - اگر اضلاع مثلث ABC را a و b و c نامیده فرض کنیم $a^2 = b^2 + c^2$ باشد ، می‌خواهیم ثابت کنیم زاویهٔ A قائمه است .



ش ۷

مثلث MNP (شکل ۷) را طوری می‌سازیم که زاویهٔ N قائمه بوده $NM = b$ و $NP = c$ باشد ؛ در این صورت بنا به قضیهٔ فیثاغورث داریم : $MP^2 = b^2 + c^2$ ؛ پس با توجه به فرض ، $MP = a$ است و لذا دو مثلث ABC و MNP برابرند (حالت سوم تساوی مثلثها) ؛ بنابراین ، زاویهٔ A قائمه می‌باشد .

۱۴ - رسم واسطهٔ هندسی اندازه های دو طول a و b .

الف - هرگاه برروی خطی طولهای $AB = a$ و $AC = b$ (شکل۸) را در یك طرف A جدا کنیم و دایرهٔ دلخواهی

ش ۸

بر B و C بگذرانیم و از A مماس AT را بر دایره رسم کنیم :

$$AT^2 = AC \cdot AB = a \cdot b$$

پس AT واسطهٔ هندسی مطلوب است .

ب - AB را مساوی a (طول بزرگتر) رسم می‌کنیم و به‌قطر AB نیمدایره‌ای می‌زنیم ؛ AC را مساوی b روی AB جدا می‌کنیم (شکل ۹) ، بطوری که نقطهٔ C بین A و B باشد؛ عمودی که از C بر AB اخراج شود ، نیمدایره را در D قطع می‌کند و AD قطعهٔ مطلوب است ؛ زیرا که :

ش ۹

$$AD^2 = AB \cdot AC = a \cdot b$$

رسم واسطهٔ هندسی از راههای دیگر هم ممکن است .

۱۵ - مسئله - مجموع (یا تفاضل) دو پاره‌خط و حاصل ضربشان در دست است ، آن دو طول را به طریق رسم بیابید .

الف - مجموع و حاصل‌ضرب داده شده‌اند .

حل- دو خط بر هم عمود می‌کنیم و بریکی AB را مساوی مجموع دو قطعهٔ مطلوب و بر دیگری $AU=1$ و $AP=p$ (حاصل ضرب دو قطعه) را در دو طرف نقطهٔ A جدامی‌کنیم (شکل

ش ۱۰

۱۰) ؛ عمود منصفهای AB و PU یکدیگر را در O قطع می‌کنند ؛ دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA رسم می‌کنیم، آنگاه از P خط PP' را موازی با AB می‌کشیم تا دایره را در P' قطع کند وعمود $P'U'$ را بر AB فرود می‌آوریم تا آن را در M تلاقی کند ؛ MA و MB دو قطعه‌خط مطلوب هستند ، زیرا که :

$$MA+MB=AB \;\text{و}\; MA\times MB=MP'\times MU'=AP\times AU=p$$

ب - تفاضل و حاصل‌ضرب داده شده‌اند .

باز دوخط برهم عمود می‌کنیم و بر یکی MM' را مساوی تفاضل و بر دیگری MU و MP را بترتیب مساوی ۱ و p در دو طرف نقطهٔ M جدا می‌کنیم(شکل۱۱)؛ عمود منصفهای MM' و PU یکدیگر را در O تلاقی‌می‌کنند؛ دایره‌ای که به‌مرکز O و شعاع OP رسم شود ، MM' را در A و B قطع می‌کند و MA و MB جوابهای مسئله هستند .

ش ۱۱

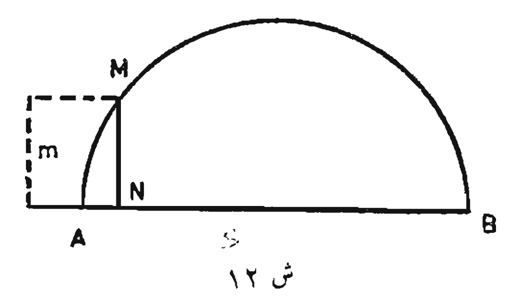
$$MA \cdot MB = p \quad \text{و} \quad MB - MA = MM'$$

اثبات صحت ترسیم در هردو حال بر عهدهٔ دانش‌آموزان است .

دقت کنید- اگر حاصل ضرب p را بتوان به صورت $m \cdot n$ در آورد ، به جای اینکه در روی شکل ، ۱ و p را جدا کنیم ، می‌توان دو طول برابر m و n جدا کرد .

۱۶ ـ مسئله (حالت خاص) ـ s مجموع (یا d تفاضل) دوپاره‌خط و m واسطهٔ هندسی آنها در دست است ؛ آن دو را با ترسیم بدست‌آورید.

حل ـ الف ـ مجموع داده شده است ـ AB رامساوی s ، مجموع دو پاره‌خط ، رسم می‌کنیم و بدقطر AB دایره‌ای می‌زنیم (شکل ۱۲) ؛ از یك نقطهٔ خط AB عمودی مساوی m ، واسطهٔ هندسی ، بر آن

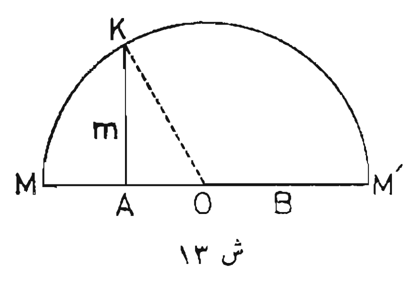


ش ۱۲

اخراج کرده از انتهای عمود خطی موازی با AB می‌کشیم تا دایره را در M قطع کند ؛ از M عمودی بر AB فرود می‌آوریم تا آن را در N تلاقی کند ؛ NA و NB پاره‌خطهای مطلوبند ، زیرا که :

$$\begin{cases} NA+NB=AB=s \\ NA \cdot NB=NM^2=m^2 \end{cases}$$

ب ـ تفاضل داده شده است ـ AB را مساوی d ، تفاضل دوپاره‌خط ، می‌کشیم (شکل ۱۳) و از A عمود AK را مساوی m ، واسطهٔ هندسی ، بر AB اخراج



ش ۱۳

می‌کنیم و به مرکز O ، وسط AB ، و شعاع OK نیمدایره‌ای می‌زنیم تا امتداد AB را در M و M′ قطع کند ؛ پاره‌خطهای AM و AM′ جوابهای مسئله هستند ؛ زیرا که بآسانی فهمیده می‌شود که :

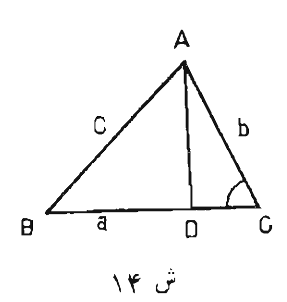
$$AM=BM'$$

و

$$\begin{cases} AM'-AM=AM'-BM'=AB=d \\ AM' \times AM=AK^2=m^2 \end{cases}$$

۱۷ـ رابطهٔ چهارم ـ قضیه ـ در هر مثلث ، مجذور ضلع مقابل به زاویهٔ حاده مساوی است با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر منهای دو برابر حاصل ضرب یکی از این دو ضلع در تصویر دیگری بر همین ضلع .

برهان ـ ارتفاع AD را رسم می‌کنیم (شکل ۱۴) ؛ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD :



ش ۱۴

$$(1) \qquad AB^2=AD^2+BD^2$$

اما در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADC :

$$(2) \qquad AD^2=AC^2-DC^2$$

رابطه های ۱ و ۲ را با هم جمع کرده جمله‌های متشابه AD^2 را از دو طرف حذف می‌کنیم :

$$(3) \qquad AB^2=AC^2+BD^2-DC^2$$

می‌بینیم که :

$$BD=BC-DC$$

مقدار طرف دوم را به جای BD در رابطهٔ ۳ قرار می دهیم ،

$$AB^2=AC^2+(BC-DC)^2-DC^2$$
$$=AC^2+BC^2+DC^2-2BC \cdot DC-DC^2$$
$$=AC^2+BC^2-2BC \cdot DC$$

هرگاه به جای BC و AC و AB بترتیب مقادیر a و b و c را قرار دهیم :

$$c^2=a^2+b^2-2a \cdot CD$$

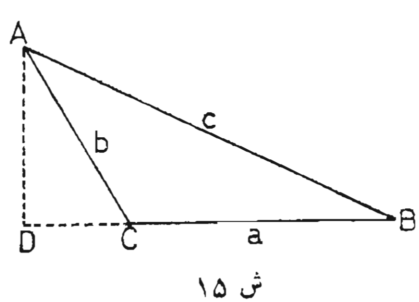
۱۸- رابطهٔ پنجم - قضیه - در مثلث منفرج‌الزاویه، مجذور ضلع مقابل به زاویهٔ منفرجه مساوی است با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر بعلاوهٔ دوبرابر حاصل ضرب یکی از این دو ضلع در تصویر دیگری برهمین ضلع.

برهان - ارتفاع AD را رسم می‌کنیم (شکل ۱۵) ؛ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD :

(۱) $AB^2=AD^2+DB^2$

امادرمثلث قائم‌الزاویهٔ ADC :

(۲) $AD^2=AC^2-DC^2$



ش ۱۵

رابطه های ۱ و ۲ را با هم جمع کرده جمله‌های متشابه AD^2 را از دو طرف حذف می‌کنیم :

$$AB^2=AC^2+DB^2-DC^2 \qquad (۳)$$

اما می‌بینیم که : $DB=DC+CB$

مقدار طرف دوم را به جای DB در رابطهٔ ۳ قرار می‌دهیم :

$$AB^2=AC^2+(DC+CB)^2-DC^2$$
$$=AC^2+CB^2+DC^2+2CB\cdot DC-DC^2$$
$$=AC^2+BC^2+2BC\cdot DC$$

یا : $c^2=a^2+b^2+2a\cdot CD$

۱۹- نتیجهٔ مهم - هرگاه از دو رابطهٔ :

$c^2=a^2+b^2-2a\cdot CD$ (در مثلث حادالزاویه)

و $c^2=a^2+b^2+2a\cdot CD$ (در مثلث منفرج‌الزاویه)

برای محاسبهٔ CD ، طول تصویر ضلع b بر ضلع a ، استفاده

کنیم ، به این نتیجه‌ها می‌رسیم :

در مثلث حادالزاویه : $CD=+\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$

در مثلث منفرج‌الزاویه : $CD=-\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$

پس درهرحال ، طول تصویرضلع b برضلع a مقدار $\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$ است . علامت + یا − بیان می‌کند که b مجاور به زاویهٔ حاده یا مجاور به زاویهٔ منفرجه است . در اولی a^2+b^2 از c^2 بزرگتر و در دومی از آن کوچکتر است .

محاسبهٔ طول خطوط مهم مثلث

۲۰- محاسبهٔ ارتفاع - هرگاه AH ، ارتفاع وارد بر ضلع a ، را h_a بنامیم ، برای محاسبهٔ آن چنین می‌گوییم (شکل ۱۶) : در مثلث ACH ، $h_a^2=b^2-HC^2$

اما : $HC=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$

پس : $h_a^2=b^2-\frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2}$

ش ۱۶

$$=\frac{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2}$$
$$=\frac{(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)}{4a^2}$$
$$=\frac{[(a^2+2ab+b^2)-c^2][c^2-(a^2-2ab+b^2)]}{4a^2}$$
$$=\frac{[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]}{4a^2}$$

یا $$(E)\quad h_a^2=\frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c+b-a)}{4a^2}$$

اگر ، برای اختصار ، محیط مثلث را به $2p$ نمایش دهیم ، $a+b+c=2p$ ، بآسانی نتیجه می‌شود که $a+b-c=2(p-c)$ و $a+c-b=2(p-b)$ و $b+c-a=2(p-a)$.

این مقادیر را در رابطهٔ (E) می‌بریم :

$$h_a^2=\frac{2p.2(p-a).2(p-b).2(p-c)}{4a^2}=\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2}$$

و پس از استخراج جذر : $h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

به طریق مشابه دیده می‌شود که :

$$h_b=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_c=\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

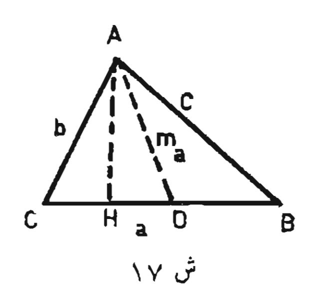
۲۱ ـ نتیجه ـ هرگاه دردستور مساحت مثلث، $S=\frac{ah_a}{2}$ ، به جای h_a مقدارش را قرار دهیم ، خواهیم داشت :

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

این دستور بسیار عملی و مفید است . لابد می‌دانید که برای محاسبهٔ مساحت چندضلعی، باید به‌وسیلهٔ رسم قطرها، آن را به‌چند مثلث تجزیه کرد و مجموع مساحتهای آنها را بدست آورد . دستور محاسبهٔ مساحت مثلث از روی اضلاع ، در این مورد بسیار قابل استفاده است .

۲۲ـ محاسبهٔ میانه ـ قضیه ـ در هر مثلث ، مجموع مجذورهای

دو ضلع ، مساوی است با دو برابر مجذور میانهٔ وارد بر ضلع سوم بعلاوهٔ نصف مجذور ضلع سوم .



ش ۱۷

برهان ـ میانهٔ AD را رسم می‌کنیم و آن را m_a می‌نامیم (شکل ۱۷) ؛ جز در حالت مثلث متساوی‌الساقین ، در هر حالت دیگر ، دو مثلث ADC و ADB بدست می‌آیند که یکی منفرج‌الزاویه و دیگری حادالزاویه است .

در مثلث ADC $$b^2=m_a^2+\frac{a^2}{4}-2\times\frac{a}{2}\times HD$$

و در مثلث ADB : $$c^2=m_a^2+\frac{a^2}{4}+2\times\frac{a}{2}\times HD$$

دو رابطه را با هم جمع می‌کنیم : $$b^2+c^2=2m_a^2+2\times\frac{a^2}{4}$$

یا : $$b^2+c^2=2m_a^2+\frac{a^2}{2}$$

اکنون از رابطهٔ اخیر ، میانهٔ m_a را بدست می‌آوریم :

$$m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$$

و به طریق مشابه : $$m_b^2=\frac{2(c^2+a^2)-b^2}{4}$$

و $$m_c^2=\frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}$$

دقت کنید ! همیشه مجذورضلعی‌که باید میانهٔ وارد برآن حساب شود ، از دو برابر مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر تفریق می‌شود .

محاسبهٔ نیمساز داخلی

۲۳- قضیه - حاصل ضرب دو ضلع هر مثلث، مساوی است با مجذور نیمساز زاویهٔ بین آن دوضلع، بعلاوهٔ حاصل ضرب دوقطعه‌ای که این نیمساز از ضلع سوم جدا می‌کند.

برهان - دایرهٔ محیطی مثلث را رسم می‌کنیم تا امتداد نیمساز A را در E قطع کند (شکل ۱۸). دو مثلث ACE و ABD متشابهند (چرا؟)، پس

$$\frac{AC}{AE}=\frac{AD}{AB}$$

ش ۱۸

$$AC\cdot AB=AE\cdot AD=(AD+DE)AD=AD^{2}+DE\cdot DA$$

اما $DE\cdot DA=DB\cdot DC$، پس $AC\cdot AB=AD^{2}+DB\cdot DC$

۲۴ - از رابطهٔ اخیر می‌توان طول نیمساز AD را حساب کرد.

به این ترتیب: $AD^{2}=AC\cdot AB-DB\cdot DC=bc-DB\cdot DC$

اما $DB=\frac{ac}{b+c}$ و $DC=\frac{ab}{b-c}$ (شمارهٔ ۱۸ فصل چهاردهم)

پس:

$$AD^{2}=bc-\frac{a^{2}bc}{(b+c)^{2}}$$

$$=\frac{bc(b+c)^{2}-a^{2}bc}{(b+c)^{2}}=\frac{bc[(b+c)^{2}-a^{2}]}{(b+c)^{2}}$$

$$=\frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^{2}}$$

$$=\frac{4pbc(p-a)}{(b+c)^{2}}$$

پس از استخراج جذر: نیمساز زاویهٔ A $=\frac{2}{b+c}\sqrt{pbc(p-a)}$

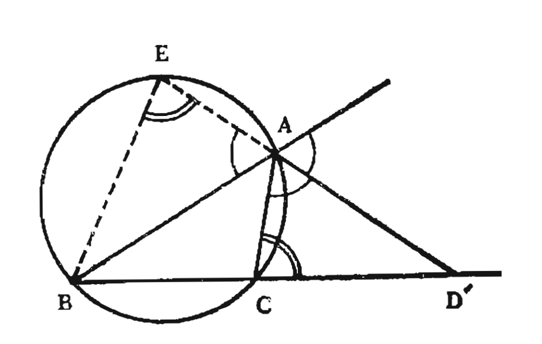
و به طریق متشابه: نیمساز زاویهٔ B $=\frac{2}{a+c}\sqrt{pac(p-b)}$

و نیمساز زاویهٔ C $=\frac{2}{a+b}\sqrt{pab(p-c)}$

محاسبهٔ نیمساز زاویهٔ خارجی

۲۵- قضیه - حاصل ضرب دو ضلع هر مثلث، برابر است با حاصل ضرب دو قطعه‌ای که پای نیمساز خارجی زاویهٔ این دو ضلع روی ضلع سوم پدید می‌آورد منهای مجذور طول همین نیمساز.

برهان - دایرهٔ محیطی مثلث را رسم می‌کنیم (شکل ۱۹)؛ اگر AD'، نیمساز خارجی A، آن را در نقطهٔ دیگری مانند E قطع کند، دومثلث ACD' و AEB متشابهند (چرا؟)؛ پس:



ش ۱۹

$$\frac{AC}{AE}=\frac{D'A}{AB}$$

یا

$$AB\cdot AC=D'A\cdot AE$$

چون $AE=D'E-D'A$، پس:

$$AB\cdot AC=D'A\cdot(D'E-D'A)=D'A\cdot D'E-D'A^{2}$$

محاسبهٔ نیمساز داخلی

۲۳- قضیه - حاصل ضرب دو ضلع هر مثلث، مساوی است با مجذور نیمساز زاویهٔ بین آن دو ضلع، بعلاوهٔ حاصل ضرب دو قطعه‌ای که این نیمساز از ضلع سوم جدا می‌کند.

برهان - دایرهٔ محیطی مثلث را رسم می‌کنیم تا امتداد نیمساز A را در E قطع کند (شکل ۱۸). دو مثلث ACE و ABD متشابهند (چرا؟)، پس

$$\frac{AC}{AE}=\frac{AD}{AB}$$

ش ۱۸

$$AC\cdot AB=AE\cdot AD=(AD+DE)AD=AD^2+DE\cdot DA$$

اما $DE\cdot DA=DB\cdot DC$، پس $AC\cdot AB=AD^2+DB\cdot DC$

۲۴ - از رابطهٔ اخیر می‌توان طول نیمساز AD را حساب کرد.

به این ترتیب: $AD^2=AC\cdot AB-DB\cdot DC=bc-DB\cdot DC$

اما $DB=\frac{ac}{b+c}$ و $DC=\frac{ab}{b-c}$ (شمارهٔ ۱۸ فصل چهاردهم)

پس:

$$AD^2=bc-\frac{a^2bc}{(b+c)^2}$$

$$=\frac{bc(b+c)^2-a^2bc}{(b+c)^2}=\frac{bc[(b+c)^2-a^2]}{(b+c)^2}$$

$$=\frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}$$

$$=\frac{4pbc(p-a)}{(b+c)^2}$$

پس از استخراج جذر: $\frac{2}{b+c}\sqrt{pbc(p-a)}=$ نیمساز زاویهٔ A

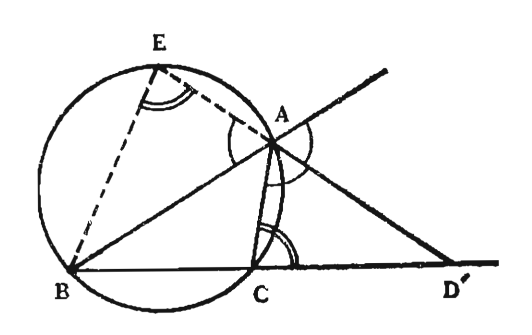
و به طریق متشابه: $\frac{2}{a+c}\sqrt{pac(p-b)}=$ نیمساز زاویهٔ B

و $\frac{2}{a+b}\sqrt{pab(p-c)}=$ نیمساز زاویهٔ C

محاسبهٔ نیمساز زاویهٔ خارجی

۲۵- قضیه - حاصل ضرب دو ضلع هر مثلث، برابر است با حاصل ضرب دو قطعه‌ای که پای نیمساز خارجی زاویهٔ این دو ضلع روی ضلع سوم پدید می‌آورد منهای مجذور طول همین نیمساز.

برهان - دایرهٔ محیطی مثلث را رسم می‌کنیم (شکل ۱۹)؛ اگر AD'، نیمساز خارجی A، آن را درنقطهٔ دیگری مانند E قطع کند، دومثلث ACD' و AEB متشابهند (چرا؟)؛ پس:



ش ۱۹

$$\frac{AC}{AE}=\frac{D'A}{AB}$$

یا

$$AB\cdot AC=D'A\cdot AE$$

چون $AE=D'E-D'A$، پس:

$$AB\cdot AC=D'A\cdot(D'E-D'A)=D'A\cdot D'E-D'A^2$$

اما $D'A\cdot D'E=D'C\cdot D'B$

و از آنجا $\boxed{AB\cdot AC=D'C\cdot D'B-AD'^{2}}$

۲۶- از رابطهٔ اخیر ، می‌توان طول نیمساز AD' را به حسب اضلاع مثلث حساب کرد . به این ترتیب :

$$AD'^{2}=D'C\cdot D'B-AB\cdot AC$$

اما $D'C=\frac{a\cdot b}{c-b}$ و $D'B=\frac{a\cdot c}{c-b}$ (شماره ۱۹ فصل چهاردهم)

پس

$$AD'^{2}=\frac{a^{2}\cdot b\cdot c}{(c-b)^{2}}-b\cdot c$$

$$=\frac{a^{2}\cdot b\cdot c-b\cdot c(c-b)^{2}}{(c-b)^{2}}=\frac{bc[a^{2}-(c-b)^{2}]}{(c-b)^{2}}$$

$$=\frac{bc(a+c-b)(a+b-c)}{(c-b)^{2}}=\frac{4bc(p-b)(p-c)}{(c-b)^{2}}$$

پس از استخراج جذر :

$$\text{نیمساز خارجی زاویهٔ A}=\frac{2}{|c-b|}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}$$

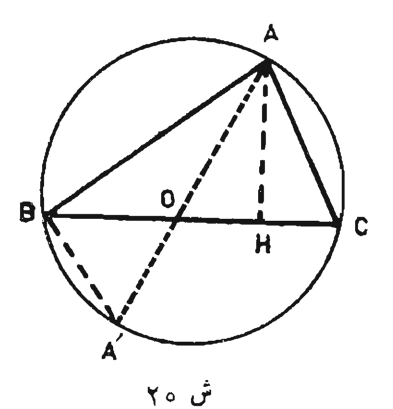
$$\text{نیمساز خارجی زاویهٔ B}=\frac{2}{|a-c|}\sqrt{ac(p-a)(p-c)}$$

$$\text{نیمساز خارجی زاویهٔ C}=\frac{2}{|a-b|}\sqrt{ab(p-a)(p-b)}$$

محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محیطی

۲۷ - قضیه - حاصل ضرب هر دوضلع مثلث مساوی است با حاصل ضرب ارتفاع وارد بر ضلع سوم در قطر دایرهٔ محیطی مثلث .

برهان - ارتفاع AH و قطر AA' از دایرهٔ محیطی مثلث ABC را می‌کشیم (شکل ۲۰) و BA' را وصل می‌کنیم ؛ دو مثلث AHC و ABA' متشابهند (به چه دلیل ؟) ؛ پس :



ش ۲۰

$$\frac{AB}{AA'}=\frac{AH}{AC}$$

یا : $AB\cdot AC=AA'\cdot AH$ یعنی $bc=2Rh_a$.

دو طرف رابطهٔ اخیر را در a ضرب می‌کنیم :

$$abc=2ah_aR$$

و چون به جای ah_a دو برابر مساحت مثلث را قرار دهیم :

$$abc=4RS$$

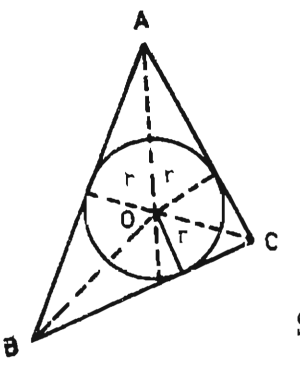
پس $\boxed{R=\frac{abc}{4S}\text{(شعاع دایرهٔ محیطی)}}$

۲۸- محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محاطی - اگر O نقطهٔ تقاطع نیمسازها یعنی مرکز دایرهٔ محاطی باشد و شعاع دایرهٔ محاطی را r بنامیم (شکل ۲۱) ،

مساحت $ABC=$ مساحت $BOC+$ مساحت $AOB+$ مساحت COA

یا $S=\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}+\frac{cr}{2}=\frac{(a+b+c)}{2}r$

یعنی $S=pr$



ش ۲۱

و از آنجا : $r=\frac{S}{p}$ (شعاع دایرهٔ محاطی)

۲۹ ـ قضیهٔ بطلمیوس ـ در چهار ضلعی محاطی حاصل ضرب دو قطر برابر است با مجموع حاصل ضربهای هر دو ضلع مقابل به هم .

برهان ـ BM را چنان رسم می‌کنیم که :

$$\widehat{MBC}=\widehat{ABD}$$

شود (شکل ۲۲) ؛ بنابراین : $\widehat{ABM}=\widehat{CBD}$ خواهد شد ، زیرا که $\widehat{MBD}$ را به دو زاویهٔ قبلی افزوده‌ایم ؛ نتیجه آنکه :

ش ۲۲

۱ـ $\Delta MBC \sim \Delta ABD$

و $\frac{BC}{BD}=\frac{MC}{AD}$

یا $AD\cdot BC=BD\cdot MC$ (۱)

۲ـ $\Delta BCD \sim \Delta ABM$

و $\frac{AB}{BD}=\frac{AM}{CD}$

یا $AB\cdot CD=AM\cdot BD$ (۲)

چون روابط ۱ و ۲ را باهم جمع‌کنیم ودرطرف دوم BD را عامل مشترك قرار دهیم و به جای $AM+MC$ مساویش AC را بگذاریم ،

$$AD\cdot BC+AB\cdot CD=BD\cdot MC+BD\cdot AM$$
$$=BD(MC+AM)$$

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$$

خلاصهٔ مطالب مهم :

۱ ـ تصویر هر نقطه بر یك خط ، پای عمودی است جدید که از آن نقطه بر خط فرود آید .

۲ ـ روابط طولی در هندسه روابطی هستندکه به اندازه‌های خطوط بستگی دارند .

۳ ـ هرگاه دو وتر یکدیگررا درداخل دایره قطع‌کنند ، حاصل ضرب دو قطعهٔ یکی مساوی است با حاصل ضرب دو قطعهٔ دیگری .

۴ ـ هرگاه از نقطه‌ای واقع در خارج دایره دو قاطع رسم‌کنیم تادایره را قطع‌کنند ، حاصل ضرب دو قطعهٔ هر قاطع مساوی است با حاصل ضرب دو قطعهٔ دیگری .

۵ ـ مربع مماسی که از یك نقطه بر دایره رسم شود ، مساوی است با حاصل ضرب دو قطعهٔ هر قاطعی که ازآن نقطه رسم شود .

۶ ـ واسطهٔ هندسی دوعدد : عددی استکه مربعش مساوی حاصل ضرب آن دوعدد باشد. به عبارت دیگر، واسطهٔ هندسی دو عدد ، جذر حاصل ضرب آنهاست .

۷ ـ روابط طولی در مثلث :

الف ـ در مثلث قائم‌الزاویه ،

I ـ ارتفاع وارد بر وتر واسطهٔ هندسی است بین دو قطعهٔ وتر .

II ـ هرضلع واسطهٔ هندسی است بین وتر و تصویر همان ضلع بروتر.

III ـ مجذور وتر مساوی است با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر.

ب ـ در هر مثلث غیرمشخص ،

I ـ مجذور ضلع روبروی زاویهٔ حاده مساوی است با مجموع مجذور-های دوضلع دیگر منهای دو برابر حاصل ضرب یکی از این دوضلع درتصویر دیگری بر همین ضلع .

II ـ مجذور ضلع روبروی زاویهٔ منفرجه مساوی است با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر بعلاوهٔ دو برابر حاصل ضرب یکی از این دوضلع

در تصویر دیگری برهمین ضلع .

۸ ـ در هر مثلث طول تصویر ضلع b بر ضلع a مساوی است با $\pm\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$ ؛ علامت $+$ یا $-$ نشان می‌دهد که ضلع b مجاور به زاویهٔ حاده بوده است یا مجاور به زاویهٔ منفرجه .

۹ ـ ارتفاع وارد برهرضلع مثلث مساوی است باحاصل ضرب دوبرابر عکس آن ضلع در مقدار ثابت $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ؛ (p نصف محیط مثلث است) .

$$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_b=\frac{2}{b}\sqrt{\cdots\cdot} \qquad h_c=\frac{2}{c}\sqrt{\cdots\cdot}$$

۱۰ ـ مساحت هر مثلث از روی اضلاع آن به وسیلهٔ این دستور بدست می‌آید :

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

۱۱ ـ مجموع مجذورهای دو ضلع هر مثلث مساوی است با دو برابر مجذور میانهٔ وارد بر ضلع سوم بعلاوهٔ نصف مجذور ضلع سوم . با استفاده از این خاصیت ، می‌توان میانه‌های مثلث را حساب کرد . مثلا :

$$m_a=\frac{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{2}$$

۱۲ ـ حاصل‌ضرب دو ضلع هرمثلث مساوی است بامجذور نیمساز وارد بر ضلع سوم بعلاوهٔ حاصل ضرب دو قطعه‌ای‌که این نیمساز از ضلع مقابل جدا می‌کند . با استفاده ازاین خاصیت می‌توان طول نیمساز زاویهٔ مثلث راحساب کرد . مثلا :

$$\text{نیمساز زاویهٔ } A=\frac{2}{b+c}\sqrt{pbc(p-a)}$$

۱۳ ـ حاصل ضرب دوضلع هرمثلث مساوی‌است با حاصل ضرب ارتفاع وارد بر ضلع سوم در قطر دایرهٔ محیطی : $bc=2R\cdot h_a$. با استفاده از این خاصیت مقدار R حساب می‌شود :

$$R=\frac{bc}{2h_a}=\frac{abc}{4S}$$

۱۴ ـ شعاع دایرهٔ محاطی مثلث از این رابطه بدست می‌آید : $S=pr$ ، یعنی :

$$r=\frac{S}{p}$$

۱۵ ـ در هر چهار ضلعی محاطی حاصل ضرب دو قطر مساوی است با مجموع حاصل ضربهای هر دو ضلع مقابل به هم (قضیهٔ بطلمیوس) .

تمرین

۱ ـ ازنقطه‌ای به فاصلهٔ $\frac{7R}{2}$ از مرکز دایره‌ای به شعاع R دو مماس برآن رسم می‌کنیم . مطلوب است طول هرمماس وطول وتر بین نقاط تماس .

۲ ـ در مثلث ABC سه ارتفاع AA' ، BB' و CC' در نقطهٔ H متقاربند . ثابت کنید که : $HA\cdot HA'=HB\cdot HB'=HC\cdot HC'$

۳ ـ ثابت کنید که مجموع مربعات فواصل هرنقطهٔ واقع برروی دایرهٔ محیطی یك مستطیل از چهار رأس آن مقداری است ثابت .

۴ ـ وتر مشترك دو دایرهٔ متقاطع بروسط مماس مشترکشان می‌گذرد .

۵ ـ مماسهایی که از هر نقطهٔ واقع بر امتداد وتر مشترك دو دایرهٔ متقاطع برآن دو دایره رسم شود ، متساویند .

۶ ـ سه نقطهٔ A، B و C متوالیاً بر یك امتدادند . برA و B دوایر متغیری می‌گذرانیم و از C مماس CT را برآنها رسم می‌کنیم . مطلوب است مکان نقاط تماس .

۷ - I و I' مرکزهای دایرهٔ محاطی داخلی و دایرهٔ محاطی خارجی ضلع a از مثلث ABC می‌باشند. ثابت کنید که $AI \cdot AI' = AB \cdot AC$

۸ - بر امتداد قطر AB از نیمدایره‌ای به مرکز O نقطه‌ای مانند P بدست آورید که اگر ازآن مماس PC بردایره رسم شود، $PC = 2PA$ باشد.

۹ - در سه دایرهٔ دوبدو متقاطع، وترهای مشترك بر يك نقطه می - گذرند.

۱۰ - دایره‌ای بر دو نقطهٔ A و B مرور دهید که بر خط مفروض Δ مماس باشد.

۱۱ - مکان نقاطی راکه مجموع مربعهای فاصله‌هایشان از دوخط ثابت عمود برهم مساوی مقدار ثابت a^2 است، تعیین کنید.

۱۲ - در مثلث قائم‌الزاویه‌ای دو ضلع بترتیب ۳ و ۴ هستند. وتر، ارتفاع وارد بر وتر، قطعاتی که این ارتفاع از وتر جدا می‌کند و شعاع دایرهٔ محاطی را حساب کنید.

۱۳ - در ذوزنقهٔ $ABCD$ زاویهٔ A قائمه است و $AB = 13$ و $CD = 8$ و $AD = 12$. حساب کنید طول BC را.

۱۴ - اگر در مثلث قائم‌الزاویه‌ای يك ضلع دوبرابر ضلع دیگر باشد، ارتفاع، وتر را به نسبت $\frac{1}{4}$ تقسیم می‌کند.

۱۵ - اگر در مثلث قائم‌الزاویه‌ای يك زاویه ۱۵ درجه باشد، ارتفاع وارد بر وتر مساوی ربع وتر است.

۱۶ - در مثلث ABC زاویهٔ A قائمه است. ارتفاع AD و عمود DE را بر AB رسم می‌کنیم. ثابت کنید که $AD^2 = AC \cdot DE$.

۱۷ - نیمدایره‌ای به‌قطر AB وبه‌مرکز O ودر درون‌آن نیمدایره‌ای به قطر OB رسم کنید. از نقطهٔ C واقع بر OB عمود CDE را بر AB اخراج کنید تا دو نیمدایره را در D و E قطع کند. ثابت کنید:

$$BE^2 = 2BD^2$$

۱۸ - ثابت کنید که اگر يك زاویهٔ مثلثی $60°$ باشد، مربع ضلع

مقابل به آن مساوی است با مجموع مربعهای دو ضلع دیگر منهای حاصل ضرب آنها.

۱۹ - در دو دایرهٔ متخارج به شعاعهای r و r' و خط‌المرکزین d طول مماسهای مشترك خارجی و داخلی را بدست‌آورید.

۲۰ - پاره خطی به طول l داده شده است، پاره خطهایی به طول $l\sqrt{2}$ و $l\sqrt{3}$ و $l\sqrt{5}$ رسم کنید.

۲۱ - ثابت کنید که در هر مثلث قائم‌الزاویه:

$$\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

۲۲ - در مثلثی $\hat{A} = 60°$ و $c = 8$ و $b = 5$ است.
I - a را بدست آورید. II - مساحت مثلث را حساب کنید. III - ارتفاع وارد برضلع b را تعیین‌کنید. IV - میانهٔ وارد برضلع c چقدراست؟ V - شعاع دوایر محیطی و محاطی را حساب کنید.

۲۳ - در مثلثی $a = 6$، $b = 7$ و $c = 3$ است.

I - ثابت کنید که $\hat{B}$ منفرجه است. II - تصویر AB را بر CB بدست آورید.

۲۴ - درهر متوازی‌الاضلاع، مجموع مربعهای چهارضلع مساوی است با مجموع مربعهای دو قطر.

۲۵ - مجموع مربعهای فواصل هر نقطه از دو رأس مقابل مستطیل مساوی است بامجموع مربعهای فواصل آن نقطه از دو رأس دیگر.

۲۶ - اگر G مرکز ثقل (محل‌برخورد سه میانه) مثلث ABC باشد،

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

۲۷ - هرگاه در چهارضلعی مجموع مربعهای دو ضلع مقابل مساوی مجموع مربعهای دوضلع دیگر باشد، دو قطر آن چهارضلعی برهم عمودند.

۲۸ - پاره خط $AB = 4a$ داده شده است. مطلوب است مکان M بقسمی که $MA^2 - MB^2 = 24a^2$ باشد.

۲۹ - هرگاه D و E نقاط برخورد يك‌ضلع مثلث با نیمسازهای زوایای

داخلی و خارجی رأس مقابل به آن باشند ، طول DE را بر حسب سه ضلع حساب کنید .

۳۰ ـ هرگاه شعاع دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC را r_a ، r_b ، r_c و مساحت‌آن را S بنامیم ، ثابت کنید که :

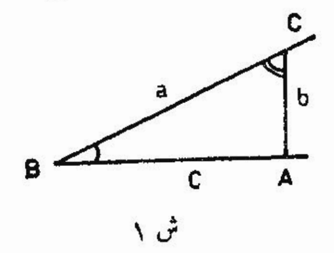
$$S=(p-a)r_a=(p-b)r_b=(p-c)r_c$$

فصل شانزدهم

نسبتهای مثلثاتی ـ حل مثلث قائم‌الزاویه

نسبتهای مثلثاتی یك زاویهٔ حاده

۱ ـ تعریف ـ نقطه‌ای دلخواه مانند A بر یکی از دو ضلع زاویهٔ حادهٔ مفروض B می‌گیریم و از آنجا عمودی بر آن ضلع اخراج می‌کنیم تا ضلع دیگر را در نقطهٔ C قطع کند (شکل۱) ؛



ش ۱

الف ـ نسبت $\frac{AC}{BC}$ را **سینوس**[1] زاویهٔ B می‌نامند .

سینوس B را باختصار اینطور نمایش می‌دهند : $sin B$.

$$sin B = \frac{AC}{BC}$$

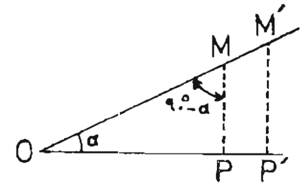
باید دانست که $sin B$ ، یعنی نسبت $\frac{AC}{BC}$ ، بستگی به جای نقطهٔ A ندارد و فقط بستگی به اندازهٔ زاویهٔ B دارد . زیرا که اگر از P و P' دو عمود بر OP اخراج کنیم (شکل ۲) ، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ

---

۱ ـ Sinus یا جِیب .

OPM و OP'M' متشابه خواهند بود و داریم : $\frac{PM}{OM}=\frac{P'M'}{OM'}$

می‌توان گفت :



ش ۲

در هرمثلث‌قائم‌الزاویه سینوس‌هرزاویهٔ حاده مساوی است با نسبت ضلع مقابل آن زاویه به وتر .

ب ـ نسبت $\frac{BA}{BC}$ (شکل ۱) را **کسینوس**[1] زاویهٔ B می‌نامیم وآن را باختصار چنین نمایش می‌دهیم : $\cos B$.

$$\cos B=\frac{BA}{BC}$$

کسینوس یك زاویه نیز فقط بستگی به اندازهٔ آن زاویه دارد و می‌توان گفت که :

در هر مثلث قائم‌الزاویه کسینوس هر یك از زاویه‌های حاده مساوی است با نسبت ضلع مجاور آن زاویه به وتر.

توجه‌کنید ! در شکل ۱ می‌بینید که زوایای B و C متمم یکدیگرند و $\sin B=\frac{AC}{BC}$ و $\cos C=\frac{AC}{BC}$ ؛ پس :

سینوس هرزاویه مساوی است با کسینوس متمم آن زاویه .

ج ـ نسبت $\frac{AC}{BA}$ را **تانژانت**[2] زاویهٔ B می‌نامیم و آن را $tg B$ می‌نویسیم :

$$tg B=\frac{AC}{BA}$$

تانژانت یك زاویه نیز فقط بستگی به آن زاویه دارد و می‌توان گفت که :

۱ ـ Cosinus یا جیب تمام . ۲ ـ Tangente یا ظل .

در هر مثلث قائم‌الزاویه تانژانت هر یك از زاویه‌های حاده مساوی است با نسبت ضلع مقابل آن زاویه به ضلع مجاورش .

د ـ نسبت $\frac{BA}{AC}$ را **کتانژانت**[1] زاویهٔ B می‌نامیم وآن را $cotg B$ یا $\cot B$ می‌نویسیم :

$$cotg B=\frac{BA}{AC}$$

می‌توان گفت : **در هر مثلث قائم‌الزاویه کتانژانت هر یك از زاویه‌های حاده مساوی است با نسبت ضلع مجاورآن زاویه به ضلع مقابلش .**
تانژانت هر زاویه مساوی کتانژانت متمم آن زاویه است .

دقت کنید ! چون در هر مثلث قائم‌الزاویه هر ضلع از وتر کوچکتر است ، $\sin B$ که برابر نسبت ضلع مقابل B به وتر می‌باشد ، همیشه عددی است کوچکتر از واحد .

همچنین $\cos B$ عددی است کوچکتر از واحد . اما $tg B$ و $cotg B$ می‌توانند برابر هرعددی باشند .

تعریف ـ سینوس ، کسینوس ، تانژانت و کتانژانت یك زاویه را نسبتهای مثلثاتی آن زاویه می‌گویند .

گاهی به جای نسبتهای مثلثاتی ، اصطلاح خطوط مثلثاتی بکار می‌رود .

۴ ـ اندازهٔ نسبتهای مثلثاتی زوایای حاده ـ عموماً اندازهٔ نسبتهای مثلثاتی زوایا را (جز در مورد چند زاویهٔ مخصوص) بطور تحقیق نمی‌توان بدست‌آورد اما مقدار تقریبی نسبتهای مثلثاتی زوایای

۱ ـ Cotangente یا ظل تمام .

حاده را حساب‌کرده در جدولهایی ضبط کرده‌اند . بعضی از این جدولها سه رقمی هستند، یعنی اندازهٔ خطوط مثلثاتی تا $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ تقریب در آن ضبط شده است . بعضی دیگر چهار رقمی یا پنج رقمی می‌باشند .

جدولهای این کتاب ، نسبتهای مثلثاتی زوایای حاده را تا سه رقم اعشار می‌دهند . از روی آن می‌بینید که :

$\sin ۱۱^\circ = ۰/۱۹۱$ $\quad$ $\cos ۴۸^\circ = ۰/۶۶۹$ $\quad$ $tg ۶۷^\circ = ۲/۳۵۶$

$\cos ۷۷^\circ = ۰/۲۲۵$ $\quad$ $\cos ۶^\circ = ۰/۹۹۵$ $\quad$ $tg ۵^\circ = ۰/۰۸۷$

$\sin ۳۰^\circ = ۰/۵۰۰$ $\quad$ $tg ۴۵^\circ = ۱/۰۰۰$ $\quad$ $\cos ۶۰^\circ = ۰/۵۰۰$

نسبتهای مثلثاتی زاویه‌ها نیم درجه به نیم درجه نوشته شده است ونسبتهای مثلثاتی سایر زوایا را باید به‌کمك تناسب، بتقریب حساب‌کرد.

مثالهای زیر ، طرز بدست‌آوردن اندازهٔ نسبتهای مثلثاتی زوایای حادهٔ دیگر را از روی این جدول به شما می‌آموزند .

مثال ۱ ـ محاسبهٔ $\sin ۴۴^\circ ۱۵'$.

چون $\sin ۴۴^\circ = ۰/۶۹۵$ و $\sin ۴۴^\circ ۳۰' = ۰/۷۰۱$ ، می‌باشد ، می‌گوییم اگر $۳۰'$ به‌زاویهٔ ۴۴° **اضافه شود** ، به‌سینوس زاویه $۰/۷۰۱ - ۰/۶۹۵$ یعنی $۰/۰۰۶$ **اضافه می‌شود** ، پس اگر به زاویه $۱۵'$ اضافه شود ، به سینوس $۰/۰۰۶ \times \frac{۱۵}{۳۰}$ یعنی $۰/۰۰۳$ افزوده خواهد شد[1] ، بنابراین :

$$\sin ۴۴^\circ ۱۵' = ۰/۶۹۵ + ۰/۰۰۳ = ۰/۶۹۸ .$$

مثال ۲ ـ محاسبهٔ $\cos ۳۱^\circ ۴۵'$.

چون $\cos ۳۱^\circ ۳۰' = ۰/۸۵۳$ و $\cos ۳۲^\circ = ۰/۸۴۸$ می‌باشد ، می‌گوییم

۱ ـ با فرض آنکه تغییرات خطوط مثلثاتی در فواصل کم ، متناسب با تغییرات زاویه باشد .

اگر $۳۰'$ به $۳۱^\circ ۳۰'$ **اضافه شود** ، $۰/۰۰۵$ از کسینوس **کم می‌شود** ، پس اگر $۱۵'$ به $۳۱^\circ ۳۰'$ افزوده شود ، $۰/۰۰۵ \times \frac{۱۵}{۳۰}$ یعنی $۰/۰۰۲۵$ از کسینوس کم خواهد شد ، پس :

$$\cos ۳۱^\circ ۴۵' = ۰/۸۵۳ - ۰/۰۰۲۵ = ۰/۸۵۰$$

(از رقم چهارم بعد از ممیز صرف نظر می‌شود) .

مثال ۳ ـ محاسبهٔ $tg ۲۵^\circ ۲۰'$.

داریم : $tg ۲۵^\circ = ۰/۴۶۶$ و $tg ۲۵^\circ ۳۰' = ۰/۴۷۷$

$$۰/۴۷۷ - ۰/۴۶۶ = ۰/۰۱۱$$

می‌گوییم اگر $۳۰'$ بر ۲۵° **افزوده شود** ، بر تانژانت $۰/۰۱۱$ **افزوده** خواهد شد ، پس اگر $۲۰'$ بر ۲۵° افزوده شود ، $۰/۰۱۱ \times \frac{۲۰}{۳۰}$ یا $۰/۰۰۷$ بر تانژانت افزوده خواهد شد ، بنابراین :

$$tg ۲۵^\circ ۲۰' = ۰/۴۶۶ + ۰/۰۰۷ = ۰/۴۷۳$$

۳ ـ یك نکتهٔ مهم ـ از روی جدول می‌بینید ، که هرگاه زاویهٔ حاده بزرگ شود :

۱ ـ سینوس آن **بزرگ** می‌شود .

۲ ـ تانژانت‌آن **بزرگ** می‌شود .

۳ ـ کسینوس‌آن **کوچك** می‌شود .

۴ ـ تعیین زاویه وقتی‌که اندازهٔ یکی از نسبتهای مثلثاتی آن معلوم باشد ـ راه حل این مسئله از مثالهای زیر بدست می‌آید . اما قبلا شما را متوجه می‌سازیم که چون $\sin$ یك زاویه با $\cos$ متمم آن یکی است ، در جدولها ، زاویه‌های از ۰° تا ۴۵° را در ستونهای سمت

چپ صفحه و زاویه‌های متمم آنها ، یعنی از ۴۶° تا ۹۰° را در ستونهای سمت راست مقابل آنها نوشته‌اند . پس شما باید قوسهای کوچکتر از ۴۵° را در ستونهای سمت چپ و قوسهای بزرگتر از ۴۵° را درستونهای سمت راست پیدا کنید .

مثال ۱ ـ تعیین زاویه‌ای که سینوس آن ۰٫۹۴۶ است .

چون در ستونهایی از جدول که بالا یا زیر آنها **جیب** نوشته شده دقیق شویم ، می‌بینیم که عدد ۰٫۹۴۶ عیناً در جدول وجود دارد و در طرف راست‌این عدد (درستون اول)، عدد ۷۱ نوشته شده است. از اینجا نتیجه می‌گیریم که زاویه‌ای که سینوس آن ۰٫۹۴۶ باشد ، ۷۱° است .

$$۰/۹۴۶ = \sin ۷۱^\circ$$

مثال ۲ ـ تعیین زاویه‌ای که تانژانت آن ۰٫۴۰۷ است .

چون در ستونهایی از جدول که بالا یا زیر آنها **ظل** نوشته شده است جستجو کنیم ، عین عدد ۰٫۴۰۷ را نمی‌یابیم ، اما می‌بینیم که این عدد از ۰٫۴۰۴ که تانژانت ۲۲° است، بزرگتر واز ۰٫۴۱۴ که تانژانت $۲۲^\circ۳۰'$ است ، کوچکتر است ؛ بنا براین ، زاویهٔ مطلوب A بین ۲۲° و $۲۲^\circ۳۰'$ است .

$$tg\,A = ۰/۴۰۷ \qquad tg\,۲۲^\circ۳۰' = ۰/۴۱۴$$
$$tg\,۲۲^\circ = ۰/۴۰۴ \qquad tg\,۲۲^\circ = ۰/۴۰۴$$

۰٫۰۰۳ = تفاوت   ۰٫۰۱۰ = تفاوت

تفاوت دو زاویه	تفاوت دو تانژانت
$۳۰'$	۰٫۰۱۰
x	۰٫۰۰۳

$$x = ۳۰ \times \frac{۰/۰۰۳}{۰/۰۱۰} = ۹'$$

پس
$$A = ۲۲^\circ ۹'$$

مثال ۳ ـ تعیین زاویهٔ حاده‌ای که‌کسینوس‌آن ۰٫۴۴۳ می‌باشد .

عدد ۰٫۴۴۳ عیناً در ستون **جیب تمام** یافت نمی‌شود ، اما می‌بینیم که ۰٫۴۴۳ از ۰٫۴۴۶ که کسینوس $۶۳^\circ۳۰'$ است ، کوچکتر واز ۰٫۴۳۸ که کسینوس ۶۴° است ، بزرگتر است .

و چون هرگاه زاویه‌ای بزرگ شود کسینوس آن کوچك می‌شود ، زاویهٔ مطلوب A از ۶۳°٫۵ بزرگتر و از ۶۴° کوچکتر است .

$$\cos ۶۳^\circ۳۰' = ۰/۴۴۶ \qquad \cos ۶۳^\circ۳۰' = ۰/۴۴۶$$
$$\cos A = ۰/۴۴۳ \qquad \cos ۶۴^\circ = ۰/۴۳۸$$

۰٫۰۰۳ = تفاوت   ۰٫۰۰۸ = تفاوت

حال می‌گوییم که اگر $۳۰'$ بر زاویهٔ $۶۳^\circ۳۰'$ افزوده شود ، از کسینوس آن ۰٫۰۰۸ کم خواهد شد ، پس چند دقیقه باید بر زاویهٔ $۶۳^\circ۳۰'$ افزوده شود ، تا از کسینوس آن ۰٫۰۰۳ کم شود ؟ جواب $۳۰ \times \frac{۰/۰۰۳}{۰/۰۰۸}$ دقیقه یا ۱۱ دقیقه است . پس :

$$A = ۶۳^\circ۴۱'$$

(درمحاسبه از ثانیه‌ها صرف نظر شده است)

روابط اصلی بین نسبتهای مثلثاتی یك زاویه

ش ۳

۵ ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC (شکل ۳) ، داریم :

$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$

ازتقسیم طرفین‌این رابطه بر AB^2

نتیجه می‌شود :

$$\frac{AC^2}{AB^2}+\frac{BC^2}{AB^2}=1$$

$$\left(\frac{AC}{AB}\right)^2+\left(\frac{BC}{AB}\right)^2=1$$

چون در این رابطه به جای $\frac{AC}{AB}$ و $\frac{BC}{AB}$ بترتیب $\cos A$ و $\sin A$ را قرار دهیم ، خواهیم داشت :

$$(\cos A)^2+(\sin A)^2=1$$

یعنی : **مجموع مربعهای کسینوس وسینوس هر زاویه برابر است با ۱** . چنین معمول شده است که مربع $\sin A$ را $\sin^2 A$ می‌نویسند و می‌خوانند سینوس۲ی A و همچنین مربع $\cos A$ را $\cos^2 A$ می‌نویسند و آن را کسینوس۲ی A می‌خوانند .

بنابراین :

$$\boxed{\sin^2 A+\cos^2 A=1} \qquad (۱)$$

از این رابطه نتیجه می‌شود که :

$$\cos^2 A=1-\sin^2 A$$

و

$$\sin^2 A=1-\cos^2 A$$

۶ - می‌دانیم که در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC (شکل ۳) ،

$$\text{tg}\,A=\frac{BC}{AC}$$

اگر صورت و مخرج کسر $\frac{BC}{AC}$ را بر AB تقسیم کنیم ، خواهیم داشت :

$$\text{tg}\,A=\frac{\frac{BC}{AB}}{\frac{AC}{AB}}$$

چون $\frac{BC}{AB}=\sin A$ و $\frac{AC}{AB}=\cos A$ است :

$$\boxed{\text{tg}\,A=\frac{\sin A}{\cos A}} \qquad (۲)$$

یعنی : **تانژانت هر زاویه مساوی است با نسبت سینوس آن زاویه به کسینوس همان زاویه** . به دلیل مشابه می‌توان ثابت کرد که :

$$\boxed{\text{cotg}\,A=\frac{\cos A}{\sin A}} \qquad (۳)$$

کتانژانت هرزاویه مساوی است با نسبت کسینوس آن زاویه به سینوس آن .

۷ - از مقایسهٔ دو رابطهٔ ۲ و ۳ نتیجه می‌گیریم که :
تانژانت وکتانژانت هر زاویه عکس یکدیگرند .

یعنی :

$$\boxed{\text{tg}\,A\,\text{cotg}\,A=1} \qquad (۴)$$

یا :

$$\text{cotg}\,A=\frac{1}{\text{tg}\,A}$$

یا :

$$\text{tg}\,A=\frac{1}{\text{cotg}\,A}$$

۸ - اگر طرفین رابطهٔ $\cos^2 A+\sin^2 A=1$ را بر $\cos^2 A$ تقسیم کنیم ، خواهیم داشت :

$$1+\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=\frac{1}{\cos^2 A}$$

$$1+\left(\frac{\sin A}{\cos A}\right)^2=\frac{1}{\cos^2 A}$$

یا :

$$1+tg^2 A=\frac{1}{\cos^2 A}$$

یا :

$$\cos^2 A=\frac{1}{1+tg^2 A}$$

و از آنجا :

$$\boxed{\cos A=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2 A}}}$$ (۵)

اگر طرفین رابطهٔ $\cos^2 A+\sin^2 A=1$ را بر $\sin^2 A$ تقسیم کنیم، خواهیم داشت :

$$1+cotg^2 A=\frac{1}{\sin^2 A}$$

و از آنجا :

$$\boxed{\sin A=\frac{1}{\sqrt{1+cotg^2 A}}}$$ (۶)

چون در این رابطه به جای $cotg\,A$ مساویش $\frac{1}{tg\,A}$ را قرار دهیم ، خواهیم داشت :

$$\boxed{\sin A=\frac{tg\,A}{\sqrt{1+tg^2 A}}}$$ (۷)

۹ ـ مسئلهٔ ۱ ـ سینوس زاویه‌ای برابر $\frac{3}{5}$ است ؛ سایر نسبتهای مثلثاتی آن زاویه را حساب کنید .

اگر آن زاویه را α فرض کنیم ، بنا به فرض داریم :

$$\sin\alpha=\frac{3}{5}$$

و چون :

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$$

پس :

$$\cos^2\alpha=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$$

و از آنجا :

$$\cos\alpha=\frac{4}{5}$$

و چون :

$$tg\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

پس :

$$tg\,\alpha=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$$

و چون :

$$cotg\,\alpha=\frac{1}{tg\,\alpha}$$

پس :

$$cotg\,\alpha=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$$

مسئلهٔ ۲ ـ $tg\beta=0{,}75$ است ؛ نسبتهای مثلثاتی دیگر β را حساب کنید .

اولا :

$$cotg\,\beta=\frac{1}{tg\beta}=\frac{1}{0{,}75}=1{,}333$$

ثانیاً : اگر در رابطهٔ $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\beta}}$ به جای $tg\beta$ مقدارش را قرار دهیم ، خواهیم داشت :

$$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+0{,}5625}}=\frac{1}{1{,}25}=0{,}8$$

ثالثاً : اگر در رابطهٔ $tg\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$ یا $\sin\beta=tg\beta\cdot\cos\beta$ به جای $tg\beta$ و $\cos\beta$ مقادیرشان را قرار دهیم :

$$\sin\beta=0{,}6$$

تمرین

نسبتهای مثلثاتی دیگر زوایای حادهٔ زیر را بدست‌آورید :

۱ -	$\sin x=\frac{5}{13}$	۲ -	$\cos y=\frac{11}{16}$
۳ -	$tg\, y=\frac{8}{15}$	۴ -	$\sin A=\frac{8}{24}$
۵ -	$\sin A=0/5$	۶ -	$\cos A=0/7574$
۷ -	$tg\,\beta=\sqrt{3}$	۸ -	$\sin\alpha=1$
۹ -	$\cos\beta=1$	۱۰ -	$tg\,\alpha=1$

۱۰ - محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ صفر درجه - در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC (شکل۴) ، $\sin A=\frac{BC}{AB}$. اگر نقطهٔ B بر روی BC حرکت کند تا بر C منطبق شود ، طول BC و زاویهٔ A صفر می‌شوند ، بنابراین :

$$\sin 0^\circ=0$$

واز آنجا :

$$\cos 0^\circ=\sqrt{1-\sin^2 0^\circ}=1$$

و

$$tg\,0^\circ=\frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ}=\frac{0}{1}=0$$

و

$$cotg\,0^\circ=\frac{1}{tg\,0^\circ}=\frac{1}{0}=\infty$$

B A C

ش ۴

۱۱ - محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی زوایای °۳۰ و °۶۰ - چون در مثلث قائم‌الزاویه ، ضلع مقابل به زاویهٔ °۳۰ نصف وتر می‌باشد ، در مثلث ABC (شکل ۵) ، $(\hat{A}=30^\circ ، \hat{C}=90^\circ)$ داریم :

$$BC=\frac{1}{2}AB$$

و چون

$$\sin A=\frac{BC}{AB}$$

B ۶۰° A ۳۰° C

ش ۵

$$\sin 30^\circ=\frac{\frac{1}{2}AB}{AB}=\frac{1}{2}$$

و از آنجا :

$$\cos 30^\circ=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

و

$$tg\,30^\circ=\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

و

$$cotg\,30^\circ=\frac{1}{tg\,30^\circ}=\sqrt{3}$$

پس :

$$\begin{cases}\sin 30^\circ=\frac{1}{2} ، & tg\,30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2} ، & cotg\,30^\circ=\sqrt{3}\end{cases}$$

چون زاویهٔ $A=30^\circ$ ، $\hat{B}=60^\circ$ ؛ وچون $\cos B=\frac{CB}{AB}$:

$$\cos 60^\circ=\frac{\frac{1}{2}AB}{AB}=\frac{1}{2}$$

و ازآنجا : $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $tg\,60^\circ=\sqrt{3}$ ، و $cotg\,60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$

پس :

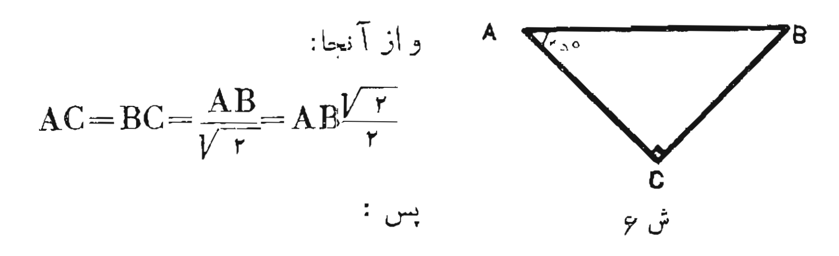
$$\begin{cases}\cos 60^\circ=\frac{1}{2} & tg\,60^\circ=\sqrt{3}\\ \sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2} & cotg\,60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}$$

۱۲- محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ °۴۵ - اگر در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC (شکل ۶) زاویهٔ $A=45^\circ$ باشد ، $\hat{B}$ نیز °۴۵ می‌شود ، یعنی : $AC=BC$ و درنتیجه :

$$AB^2=AC^2+BC^2=2AC^2=2BC^2$$

و از آنجا:

$$AC=BC=\frac{AB}{\sqrt{2}}=AB\frac{\sqrt{2}}{2}$$



ش ۶

پس:

$$tg45^\circ=\frac{BC}{AC}=1$$

و

$$cotg45^\circ=\frac{AC}{BC}=1$$

و

$$cos45^\circ=\frac{CA}{AB}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}AB}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

و

$$sin45^\circ=\frac{BC}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

یعنی:

$$\begin{cases} sin45^\circ=cos45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ tg45^\circ=cotg45^\circ=1 \end{cases}$$

۱۳ ـ محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ ۹۰° ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC (شکل ۵) داریم:

$$cosA=\frac{AC}{AB}$$

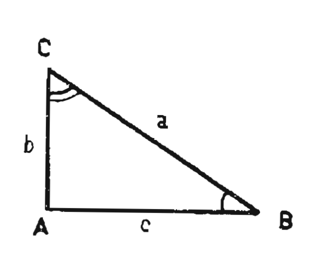
اگر زاویهٔ A مرتباً بزرگ شود و طول AC تغییر نکند، نقطهٔ B بر روی CB به بینهایت دورمی‌رود و وقتی‌که $\hat{A}=90^\circ$ شود، AB برابر ∞ می‌شود.

پس:

$$\begin{cases} cos90^\circ=\frac{AC}{\infty}=0 \\ sin90^\circ=1 \\ tg90^\circ=\frac{1}{0}=\infty \\ cotg90^\circ=\frac{0}{1}=0 \end{cases}$$

حل مثلث قائم‌الزاویه

۱۴ ـ دیدیم‌که در هرمثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که در آن $\hat{A}=90^\circ$ باشد (شکل ۷):



ش ۷

الف ـ سینوس‌هریك اززوایای حاده برابراست بانسبت ضلع‌مقابل آن زاویه به‌وتر:

$$sinB=\frac{b}{a} \qquad sinC=\frac{c}{a} \qquad (1)$$

ب ـ کسینوس هر یك از زوایای حاده برابر است با نسبت ضلع مجاور آن زاویه به وتر:

$$cosB=\frac{c}{a} \qquad cosC=\frac{b}{a} \qquad (2)$$

ج ـ تانژانت هریك از زوایای حاده برابر است با نسبت ضلع مقابل زاویه به ضلع مجاورش:

$$tgB=\frac{b}{c} \qquad tgC=\frac{c}{b} \qquad (3)$$

از روابط ۱ و۲ و۳ می‌توان نتیجه‌گرفت‌که در مثلث قائم‌الزاویه:

الف ـ هرضلع مساوی است با حاصل ضرب وتر در سینوس زاویهٔ مقابل به آن ضلع :

$$b = a\sin B \qquad c = a\sin C \qquad (4)$$

ب ـ هر ضلع مساوی است با حاصل ضرب وتر در کسینوس زاویهٔ مجاور به آن ضلع :

$$b = a\cos C \qquad c = a\cos B \qquad (5)$$

ج ـ هر ضلع مساوی است با حاصل ضرب ضلع دیگر در تانژانت زاویهٔ مقابل به‌آن ضلع :

$$b = c\,tgB \qquad c = b\,tgC \qquad (6)$$

برای حل یك مثلث قائم‌الزاویه ، علاوه بر دستورهای بالا ، روابط $a^2 = b^2 + c^2$ و $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ را نیز در نظر می‌گیریم و هر یك راکه برای منظور خود مفید ببینیم ، بکار می‌بریم . طرز عمل ، از چهار مثال زیر بدست می‌آید :

مثال ۱ ـ ازمثلث قائم الزاویهٔ ABC وتر BC و زاویهٔ حادهٔ B معلوم است ، می‌خواهیم‌آن مثلث را حل‌کنیم :

$\hat{B} = 66^\circ$ و $BC = a = 100$ متر

مجهولات عبارتند از $AC = b$ و $AB = c$ و زاویهٔ C .

اولا : $\hat{C} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 66^\circ = 24^\circ$

ثانیاً : $b = a\sin B = 100\sin 66^\circ = 100 \times 0/914 = 91/4$ متر

ثالثاً : $c = a\cos B = 100 \times 0/407 = 40/7$ متر

مثال ۲ـ از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{C} = 90^\circ$) زاویهٔ B و ضلع BC معلومند :

$BC = a = 45$ متر $\qquad \hat{B} = 30^\circ$

اولا : $\hat{A} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

ثانیاً : $b = a\,tgB = \frac{45\sqrt{3}}{3} = 15\sqrt{3}$ متر

ثالثاً : از روی رابطهٔ $a = c\sin A$ داریم : $c = \frac{a}{\sin A}$ ، پس :

$$c = \frac{45}{\sin 60^\circ} = 30\sqrt{3} \text{ متر}$$

مثال ۳ ـ ازمثلث‌قائم‌الزاویهٔ ABC وتر c و یك ضلع معلومند.

$AC = b = 103$ متر $\qquad AB = c = 200$ متر

اولا : $\sin B = \frac{b}{c} = \frac{103}{200} = 0/515$

$\hat{B} = 31^\circ$

ثانیاً : $\hat{A} = 90^\circ - \hat{B} = 59^\circ$

ثالثاً : $a = c\sin A = 200 \times 0/857 = 171/4$ متر

مثال ۴ ـ از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC دو ضلع معلومند :

$CA = b = 132 \qquad CB = a = 250$

اولا : $tgB = \frac{b}{a} = \frac{132}{250} = 0/528$

از آنجا : $\hat{B} = 27^\circ 50'$

ثانیاً : $\hat{A} = 90^\circ - \hat{B} = 62^\circ 10'$

ثالثاً: $c = \frac{b}{\sin B} = \frac{132}{0/467} = 282/7$

یادآوری ـ در این مثال می‌توانیم وتر را از روی قضیهٔ فیثاغورث نیز حساب و درستی محاسبه را تحقیق‌کنیم :

$$c^2 = a^2 + b^2 = 250^2 + 132^2 = 62500 + 17424 = 79924$$

$$c = \sqrt{79924} = 282/7$$

خلاصهٔ مطالب مهم :

۱ـ اگر یکی از دو زاویهٔ حادهٔ مثلث قائم‌الزاویه‌ای را α فرض کنیم :

الف ـ نسبت ضلع روبروی زاویهٔ α را به وتر ، سینوس α می‌نامند و آن را اینطور می‌نویسند : $\sin\alpha$.

$$\sin\alpha = \frac{\text{ضلع روبروی } \alpha}{\text{وتر}}$$

ب ـ نسبت ضلع مجاور زاویهٔ α را به وتر ،کسینوس α می‌نامند وآن را اینطور می‌نویسند : $\cos\alpha$.

$$\cos\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{وتر}}$$

ج ـ نسبت ضلع روبروی زاویهٔ α را به ضلع مجاورآن ، تانژانت α می‌نامند وآن را اینطور می‌نویسند : $tg\,\alpha$.

$$tg\,\alpha = \frac{\text{ضلع روبروی } \alpha}{\text{ضلع مجاور } \alpha}$$

د ـ نسبت ضلع‌مجاور زاویهٔ α را به ضلع روبروی α ،کتانژانت زاویهٔ α می‌نامند وآن را اینطور می‌نویسند : $cotg\,\alpha$.

$$cotg\,\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{ضلع روبروی } \alpha}$$

۲ـ چون هر ضلع زاویهٔ قائمه از وتر کوچکتر است ، $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ هیچگاه از ۱ بزرگتر نمی‌توانند باشند .

۳ـ چون دو زاویهٔ حادهٔ مثلث قائم‌الزاویه متمم یکدیگرند ، با توجه به تعریف سینوس وکسینوس زاویه ، نتیجه‌گرفته می‌شودکه :

$$\sin\alpha = \cos(۹۰^\circ - \alpha)$$

یعنی: سینوس هرزاویه مساوی است باکسینوس متمم‌آن .

ودر نتیجه : تانژانت هر زاویه مساوی است با کتانژانت متمم آن .

۴ ـ بین نسبتهای مثلثاتی هرزاویه این روابط برقرار است :

$$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \quad ، \quad tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad ، \quad cotg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

۵ـ در هرمثلث قائم الزاویه :

الف ـ هرضلع‌مساوی‌است باحاصل‌ضرب وتردرسینوس زاویهٔ مقابل به‌آن‌ضلع.

ب ـ « « « « « « «کسینوس زاویهٔ مجاور «

ج ـ « « « « « ضلع دیگردرتانژانت زاویهٔ مقابل «

د ـ « « « « « « کتانژانت زاویهٔ مجاور «

تمرین

از روی جدولهای‌آخر این‌فصل ، طرف دوم هر یك از تساویهای زیر را بنویسید :

۱ـ $\sin ۱۲^\circ =$ ۲ـ $\cos ۳۰^\circ =$ ۳ـ $tg\,۷۱^\circ =$

۴ـ $\sin ۴۱^\circ =$ ۵ـ $\cos ۵۰^\circ =$ ۶ـ $tg\,۸۹^\circ =$

۷ـ $tg\,۱۰^\circ =$ ۸ـ $\sin ۲^\circ =$ ۹ـ $\cos ۶^\circ =$

صحت تساویهای زیر را از روی جدول تحقیق‌کنید :

۱۰ـ $\sin ۳۰^\circ = \cos ۶۰^\circ$ ۱۱ـ $\cos ۲۲^\circ = \sin ۶۸^\circ$ ۱۲ـ $\sin ۴۰^\circ = \cos ۵۰^\circ$

۱۳ـ $\cos ۱۷^\circ = \sin ۷۳^\circ$ ۱۴ـ $\sin ۱۱^\circ = \cos ۷۹^\circ$ ۱۵ـ $\cos ۰^\circ = \sin ۹۰^\circ$

به‌کمك جدول طرف دوم تساویهای زیر را پیداکنید :

۱۶ـ $\cos ۵۷^\circ ۵۰' =$ ۱۷ـ $\sin ۸۲^\circ ۳۰' =$ ۱۸ـ $tg\,۷۲^\circ ۴۰' =$

۱۹ـ $\sin ۱۷^\circ ۴۰' =$ ۲۰ـ $\cos ۲۳^\circ ۲۰' =$ ۲۱ـ $tg\,۴۵^\circ ۳۰' =$

زوایای حادهٔ x ، y و z را تعیین‌کنیدکه :

۲۲ـ $tg\,z = ۱/۶۱۰$ ۲۳ـ $\sin z = ۰/۵۹۵$

۲۴ـ $\cos y = ۰/۹۷۰$ ۲۵ـ $tg\,y = ۱/۱۹۱$

۲۶ـ $\sin x = ۰/۰۰۱$ ۲۷ـ $\cos x = ۰/۰۳۴$

۲۸ـ درمثلث‌قائم‌الزاویهٔ ABC وتر $AB = ۵$ وضلع $BC = ۴$ است:

I) حساب‌کنید نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ A را.

II) تحقیق‌کنید که : $\sin^۲ A + \cos^۲ A = ۱$.

III) تحقیق‌کنیدکه :

$$tg\,A = \frac{\sin A}{\cos A} \quad و \quad cotg\,A = \frac{\cos A}{\sin A} \quad و \quad tg\,A = \frac{۱}{cotg\,A} \; .$$

IV) حساب‌کنید نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ B را .

V) تحقیق‌کنیدکه :

$$\sin A = \cos B \quad و \quad \cos A = \sin B \quad و \quad tg\,A = cotg\,B$$

۲۹ ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{C}=۹۰°$) فرض می‌شود :

I) اگر $\cos A=\frac{۳}{۴}$ و $c=۴۰$ باشد ، اندازهٔ b راحساب کنید .

II) اگر $\sin A=\frac{۱}{۲}$ و $a=۵$ « « c « « «

III) اگر $tg A=\frac{۸}{۱۵}$ و $b=۳۰$ « « a « « «

IV) اگر $cotg A=\frac{۳}{۴}$ و $c=۱۵$ « « a و b « «

۳۰ـ مطلوب‌است حل مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{C}=۹۰°$) و تعیین مساحت آن در هریك ازحالات زیر :

I) $b=۱۰۰$ متر و $\hat{B}=۶۵°$

II) « $a=۱۵$ ومتر $c=۱۷$

III) « $b=۲۰$ و $\hat{A}=۴۰°$

IV) « $c=۲/۴۷$ و $\hat{B}=۳۵°$

V) « $b=۲\sqrt{۳}$ و متر $a=۲$

VI) « $c=۲۰$ و ارتفاع وارد بر وتر ۵ متر باشد .

نسبتهای مثلثاتی قوسها

(۱)

د	جیب		ظل		ظل تمام		جیب تمام		د
۰	۰٫۰۰۰۰	۹	۰٫۰۰۰۰	۹	∞		۱٫۰۰۰۰	۰	۹۰
۰٫۵	۰۰۹	۸	۰۰۹	۸	۱۱۴٫۵۸۹	۵۷٫۲۹۹	۰۰۰	۰	۸۹٫۵
۱	۰۱۷	۹	۰۱۷	۹	۵۷٫۲۹۰	۱۹٫۱۰۲	۰۰۰	۰	۸۹
۱٫۵	۰۲۶	۹	۰۲۶	۹	۳۸٫۱۸۸	۹٫۵۵۲	۱٫۰۰۰۰	۰	۸۸٫۵
۲	۰۳۵	۹	۰۳۵	۹	۲۸٫۶۳۶	۵٫۷۳۲	۰٫۹۹۹۹	۰	۸۸
۲٫۵	۰۴۴	۸	۰۴۴	۸	۲۲٫۹۰۴	۳٫۸۲۳	۹۹۹	۰	۸۷٫۵
۳	۰۵۲	۹	۰۵۲	۹	۱۹٫۰۸۱	۲٫۷۳۱	۹۹۹	۱	۸۷
۳٫۵	۰۶۱	۹	۰۶۱	۹	۱۶٫۳۵۰	۲٫۰۴۹	۹۹۸	۰	۸۶٫۵
۴	۰۷۰	۸	۰۷۰	۹	۱۴٫۳۰۱	۱٫۵۹۵	۹۹۸	۱	۸۶
۴٫۵	۰۷۸	۹	۰۷۹	۸	۱۲٫۷۰۶	۱٫۲۷۶	۹۹۷	۱	۸۵٫۵
۵	۰۸۷	۹	۰۸۷	۹	۱۱٫۴۳۰	۱٫۰۴۵	۹۹۶	۱	۸۵
۵٫۵	۰۹۶	۹	۰۹۶	۹	۱۰٫۳۸۵	۰٫۸۷۱	۹۹۵	۰	۸۴٫۵
۶	۱۰۵	۸	۱۰۵	۹	۹٫۵۱۴	۷۳۷	۹۹۵	۱	۸۴
۶٫۵	۱۱۳	۹	۱۱۴	۹	۸٫۷۷۷	۶۳۳	۹۹۴	۱	۸۳٫۵
۷	۱۲۲	۹	۱۲۳	۹	۸٫۱۴۴	۵۴۸	۹۹۳	۲	۸۳
۷٫۵	۱۳۱	۸	۱۳۲	۹	۷٫۵۹۶	۴۸۱	۹۹۱	۱	۸۲٫۵
۸	۱۳۹	۹	۱۴۱	۸	۷٫۱۱۵	۴۲۴	۹۹۰	۱	۸۲
۸٫۵	۱۴۸	۸	۱۴۹	۹	۶٫۶۹۱	۳۷۷	۹۸۹	۱	۸۱٫۵
۹	۱۵۶	۹	۱۵۸	۹	۶٫۳۱۴	۳۳۸	۹۸۸	۲	۸۱
۹٫۵	۱۶۵	۹	۱۶۷	۹	۵٫۹۷۶	۳۰۵	۹۸۶	۱	۸۰٫۵
۱۰	۱۷۴	۸	۱۷۶	۹	۵٫۶۷۱	۲۷۶	۹۸۵	۲	۸۰
۱۰٫۵	۱۸۲	۹	۱۸۵	۹	۵٫۳۹۵	۲۵۰	۹۸۳	۱	۷۹٫۵
۱۱	۱۹۱	۸	۱۹۴	۹	۵٫۱۴۵	۲۳۰	۹۸۲	۲	۷۹
۱۱٫۵	۱۹۹	۹	۲۰۳	۱۰	۴٫۹۱۵	۲۱۰	۹۸۰	۲	۷۸٫۵
۱۲	۲۰۸	۸	۲۱۳	۹	۴٫۷۰۵	۱۹۴	۹۷۸	۲	۷۸
۱۲٫۵	۲۱۶	۹	۲۲۲	۹	۴٫۵۱۱	۱۸۰	۹۷۶	۲	۷۷٫۵
۱۳	۲۲۵	۸	۲۳۱	۹	۴٫۳۳۱	۱۶۶	۹۷۴	۲	۷۷
۱۳٫۵	۲۳۳	۹	۲۴۰	۹	۴٫۱۶۵	۱۵۴	۰٫۹۷۲	۲	۷۶٫۵
۱۴	۲۴۲	۸	۲۴۹	۱۰	۴٫۰۱۱	۱۴۴	۹۷۰	۲	۷۶
۱۴٫۵	۲۵۰	۹	۲۵۹	۹	۳٫۸۶۷	۰٫۱۳۵	۹۶۸	۲	۷۵٫۵
۱۵	۰٫۲۵۹		۰٫۲۶۸		۳٫۷۳۲		۰٫۹۶۶		۷۵
د	جیب تمام		ظل تمام		ظل		جیب		د

فصل هفدهم

چندضلعیهای منتظم

کلیات

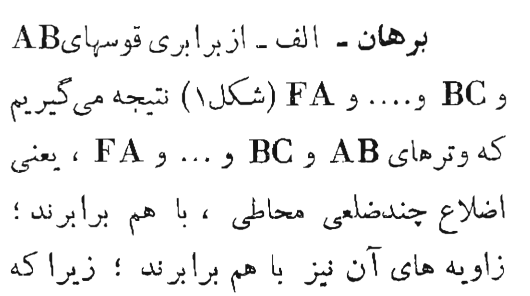
۱ـ یادآوری ـ چندضلعی منتظم آن است‌که همهٔ اضلاعش باهم و همهٔ زوایایش نیز با هم برابر باشند.

نام چندضلعی، بطوری که می‌دانید، از روی تعداد اضلاعش مشخص می‌شود: چهارضلعی، پنج‌ضلعی، ده‌ضلعی، nضلعی، ۲nضلعی.

۲ـ قضیه ـ هرگاه محیط دایره را به n جزء برابر تقسیم کنیم:

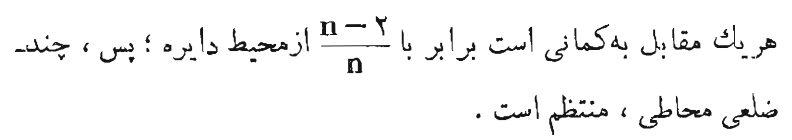
الف ـ از وصل کردن پیاپی نقاط تقسیم به یکدیگر، nضلعی منتظم محدب محاطی حاصل می‌شود.

ب ـ مماسهایی که برنقاط تقسیم رسم شوند، از تلاقی با هم، یك nضلعی منتظم محدب محیطی ایجاد می‌کنند.



برهان ـ الف ـ ازبرابری قوسهای AB و BC و .... و FA (شکل۱) نتیجه می‌گیریم که وترهای AB و BC و ... و FA، یعنی اضلاع چندضلعی محاطی، با هم برابرند؛ زاویه های آن نیز با هم برابرند؛ زیرا که

ش ۱

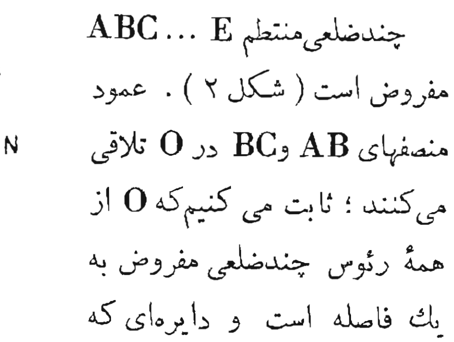


هریك مقابل به‌کمانی است برابر با $\frac{n-2}{n}$ ازمحیط دایره؛ پس، چندضلعی محاطی، منتظم است.

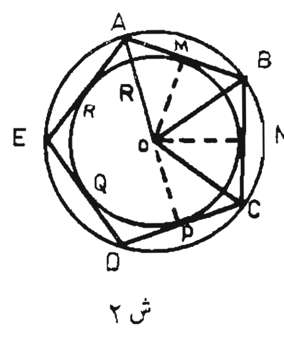
ب ـ همهٔ مثلثهای حادث بین مماسها و وترها، مانند AYB و BZC و ... متساوی الساقین و برابر یکدیگرند؛ زیراکه زوایای ظلی

YAB و YBA و ZBC و ZCB و ... همه مقابل به قوسهای متساوی هستند و اضلاع AB و BC و ... و FA نیزباهم برابر می‌باشند؛ پس XY و YZ و ... و XW، یعنی اضلاع چندضلعی محیطی، با هم و زاویه‌های AYB و BZC و ... و FXA، یعنی زاویه‌های چندضلعی محیطی، نیز باهم برابرند؛ بنابراین، چندضلعی محیطی، منتظم‌است.

۳ـ قضیه ـ همواره می‌توان بریك چندضلعی منتظم دایره‌ای محیط و درآن، دایره‌ای محاط کرد.



چندضلعی‌منتظم ABC... E مفروض است (شکل ۲). عمود منصفهای AB وBC در O تلاقی می‌کنند؛ ثابت می کنیم‌که O از همهٔ رئوس چندضلعی مفروض به یك فاصله است و دایره‌ای که



ش ۲

به مرکز O و شعاع OA رسم شود، بر چندضلعی محیط خواهد شد و نیز O از همهٔ اضلاع چندضلعی به یك فاصله است و دایرهٔ به‌مرکز O و شعاع OM برهمهٔ اضلاع مماس است، یعنی در چندضلعی محاط می‌شود.

برهان ـ مثلثهای قائم‌الزاویهٔ AOM وMOB وBON وNOC برابر یکدیگرند (چرا؟)؛ پس:

$$OA=OB=OC \quad \text{و} \quad OM=ON$$

و

$$\widehat{OAM}=\widehat{OBM}=\widehat{OBN}=\widehat{OCN}$$

نتیجه‌آنکه OB نیمساز $\hat{B}$ است و از منتظم بودن شکل، لازم

می‌آیدکه OA و OC نیز نیمساز $\hat{A}$ و $\hat{C}$ باشند . حال اگر عمود OP را بر CD فرود آوریم :

$$\Delta OPC = \Delta ONC \quad \text{(به چه دلیل ؟)}$$

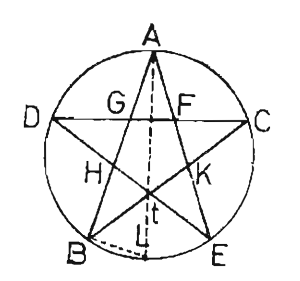
پس $OP=ON$ و $PC=CN=\frac{CD}{۲}$ ، یعنی OP عمود منصف CD است و $OC=OD$.

چون استدلال را به همین نحو ادامه دهیم ، می‌بینیم‌که O ازهمهٔ رئوس به یك فاصله و ازهمهٔ اضلاع نیز به یك فاصله است .

۴- قرارداد - ضلع nضلعی منتظم محاطی را به C_n وضلع n ضلعی منتظم محیطی را به A_n نمایش می‌دهیم .

۵- تعریف - شعاع دایرهٔ محیطی چندضلعی منتظم را **شعاع** آن چندضلعی و شعاع دایرهٔ محاطی را **ارتفاع** آن‌گویند .

۶- تعریف - اگر پس از تقسیم محیط دایره به n جزء برابر ، به جای اینکه نقاط تقسیم را پیاپی‌به هم وصل‌کنیم ،آنها را یك درمیان یا ۲ درمیان یا ... یعنی۲ به ۲ یا ۳ به ۳ یا ... یا m به m به هم‌وصل کنیم ، ممکن است یك چندضلعی بدست آیدکه برخی از اضلاع آن برخی دیگر را قطع کنند(شکل ۳) ، ولی تمام ضلعها با هم و تمام زاویه‌ها نیز با هم برابرند ؛ چنین شکلی را **nضلعی منتظم کوکبی** نامند .



ش ۳

۷- قضیه - دو چندضلعی منتظم که عدهٔ اضلاعشان یکی باشد ، متشابهند .

برهان - برابری زاویه های دو چندضلعی محرز است (چرا ؟) (شکل ۴) .

ش ۴

و چون :
$$AB=BC=CD=\ldots$$
و
$$ab=bc=cd=\ldots$$

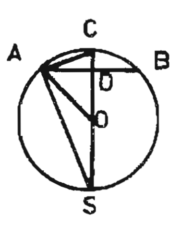
تساویها را عضو بعضو برهم تقسیم می‌کنیم :

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}=\ldots$$

بنابراین ، دو چندضلعی متشابهند .

۸- مسئله - ضلع nضلعی‌منتظم محاطی‌دردست‌است ؛ ضلع ۲nضلعی منتظم محاطی را برحسب‌آن و شعاع دایرهٔ محیطی حساب‌کنید .

حل - فرض می‌کنیم‌که AB ضلع nضلعی منتظم‌محاطی ، یعنی C_nباشد ؛ چون از A به C وسط قوس AB وصل کنیم ، AC ضلع ۲nضلعی منتظم محاطی ، یعنی $C_{۲n}$ است (شکل ۵) . شعاع OC عمود منصف وتر AB است وآن را در D قطع می‌کند ؛ امتداد شعاع OC نیز در S با محیط دایره تلاقی می‌کند .



ش ۵

در ΔASC :
$$\overline{AC}^۲=CS\cdot CD=۲R(R-OD)$$

ودر ΔAOD :
$$OD=\sqrt{R^۲-\frac{C_n^۲}{۴}}$$

پس : $C_{2n}^2 = 2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{C_n^2}{4}}\right)$

یا : $C_{2n}^2 = R(2R - \sqrt{4R^2 - C_n^2})$

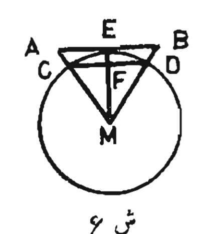
$$C_{2n} = \sqrt{R(2R - \sqrt{4R^2 - C_n^2})}$$

۹ـ مسئله ـ ارتفاع n ضلعی منتظم را برحسب شعاع دایرهٔ محیطی و ضلع n ضلعی بدست آورید.

حل مسئله برعهدهٔ دانش‌آموزان است.

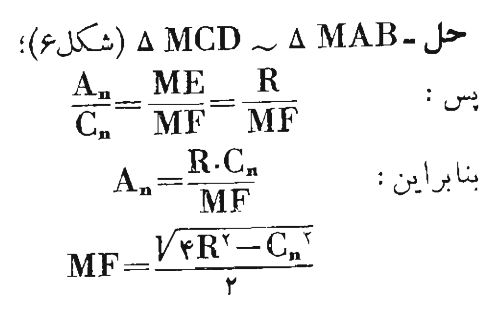
جواب : $a_n = \frac{\sqrt{4R^2 - C_n^2}}{2}$

۱۰ ـ مسئله ـ ضلع n ضلعی منتظم محیطی را برحسب شعاع دایره و ضلع n ضلعی منتظم محاطی بدست‌آورید.



ش ۶

حل ـ $\Delta MAB \sim \Delta MCD$ (شکل۶)؛



پس : $\frac{A_n}{C_n} = \frac{ME}{MF} = \frac{R}{MF}$

بنابراین : $A_n = \frac{R\cdot C_n}{MF}$

در ΔMCF : $MF = \frac{\sqrt{4R^2-C_n^2}}{2}$

پس : $A_n = \frac{2RC_n}{\sqrt{4R^2 - C_n^2}}$

۱۱ ـ مسئله ـ ضلع n ضلعی منتظم محیطی معلوم است؛ ضلع 2n ضلعی منتظم محیطی‌را برحسب آن و شعاع‌دایرهٔ محاطی حساب‌کنید.

حل ـ اگر AB و AC (شکل ۷) بترتیب نصف A_n و A_{2n} باشند، چون زاویهٔ مرکزی n ضلعی دو برابر زاویهٔ مرکزی 2n ضلعی است (چرا؟):

ش ۷

$$\widehat{AOC} = \widehat{COB}$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{OA}{OB}$$

$$\frac{AC}{AB-AC} = \frac{OA}{\sqrt{OA^2+AB^2}}$$

$$\frac{A_{2n}}{A_n - A_{2n}} = \frac{2R}{\sqrt{4R^2+A_n^2}}$$

و پس از انجام دادن ضرب وتقسیم لازم :

$$A_{2n} = \frac{2RA_n}{2R+\sqrt{4R^2+A_n^2}}$$

محاسبهٔ ضلع بعضی از چندضلعیهای منتظم برحسب شعاع دایرهٔ محیطی آنها

الف ـ ضلع مربع محاطی ـ

در شکل ۸ :

$$AC^2 = OA^2+OC^2 = 2R^2$$

پس : $C_4 = R\sqrt{2}$

ش ۸

ب ـ ضلع مثلث منتظم محاطی ـ

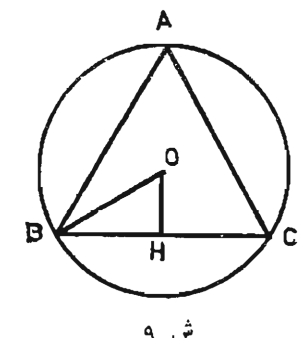
در ΔOBH (شکل ۹) :

$$OH = \frac{OB}{2} = \frac{R}{2}$$

(زیراکه : $\widehat{OBH} = 30°$)

و $BH = \frac{C_3}{2} = \sqrt{OB^2-OH^2}$

$$= \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$



ش ۹

پس : $\boxed{C_3 = R\sqrt{3}}$

ج - ضلع شش‌ضلعی منتظم محاطی - در شکل ۱۰ از O به A و B وصل می‌کنیم :

$$\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

ش ۱۰

و چون مثلث OAB متساوی الساقین است :

$$\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$$

بنابراین ، مثلث OAB متساوی الاضلاع است و

$$\boxed{C_6 = R}$$

۱۲ - مسئله - ضلع nضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع R را حساب کنید .

حل - هرگاه $\widehat{AB}$ (شکل ۱۱) مساوی $\frac{1}{n}$ محیط دایره باشد ،

$AB = C_n$ و زاویهٔ مرکزی AOB $\left(\frac{360}{n}\right)^\circ$ است . عمود OH را بر AB فرود می‌آوریم :

$$\widehat{AOH} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \left(\frac{360}{2n}\right)^\circ = \left(\frac{180}{n}\right)^\circ$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAH :

$$AH = OA\sin\widehat{AOH}$$

یا : $$\frac{C_n}{2} = R\sin\left(\frac{180}{n}\right)^\circ$$

ش ۱۱

پس : $$C_n = 2R\sin\left(\frac{180}{n}\right)^\circ$$

مثال ۱- ضلع مثلث منتظم :

$$C_3 = 2R\sin 60^\circ = 2R\times\frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$$

مثال ۲- ضلع شش ضلعی منتظم :

$$C_6 = 2R\sin\frac{180}{6} = 2R\sin 30^\circ = 2R\times\frac{1}{2} = R$$

مثال ۳ - ضلع ده‌ضلعی منتظم :

$$C_{10} = 2R\sin\frac{180}{10} = 2R\sin 18^\circ$$

با مراجعه به جدول $\sin 18^\circ = 0/309$

پس $C_{10} = 2R\times 0/309 = 0/618R$

۱۳ - قضیه - مساحت چندضلعی منتظم مساوی است با حاصل ضرب نصف محیط آن در ارتفاعش .

برهان - اگر از مرکز چندضلعی به رئوس وصل‌کنیم ، به تعداد ضلعها ، مثلث متساوی ایجاد می شود که مساحت هر یك مساوی حاصل ضرب نصف قاعده در ارتفاع است . اگر مساحت یك مثلث را s و مساحت چند‌ضلعی را S وارتفاع چندضلعی را a و عدهٔ ضلعها را n فرض‌کنیم (شکل۱۲)،

$$S = n\cdot s = n\cdot\frac{C_n}{2}\cdot a = \frac{1}{2}\text{محیط}\times\text{ارتفاع}$$

ش ۱۲

تمرین - مساحت چندضلعیهای منتظمی را که در این قسمت ازآنها صحبت شده است ، حساب‌کنید .

خلاصهٔ مطالب مهم :

۱- هرگاه محیط دایره را به n جزء متساوی تقسیم کنیم ، از وصل کردن متوالی نقاط تقسیم ، یك nضلعی منتظم محدب محاطی تشکیل می‌شود؛ اگر نقاط تقسیم‌رامنظماً بتناوب، یعنی یك درمیان یادو درمیان یا . . . ،به هم وصل کنیم ، nضلعی منتظم کوکبی بوجود می‌آید ؛ چنانچه در نقاط تقسیم ، مماسهایی بر دایره رسم‌کنیم ، از برخورد آنها با یکدیگر ، nضلعی منتظم محدب محیطی حاصل می‌شود .

۲- هرچندضلعی منتظم را می‌توان در دایره محاط یا بردایره محیط کرد .

۳- اگر C_n ضلع nضلعی‌منتظم محدب محاطی و C_{2n} ضلع ۲nضلعی منتظم محدب محاطی‌باشد :

$$C_{2n}=\sqrt{R(2R-\sqrt{4R^2-C_n^2})}$$

۴- اگر A_n ضلع nضلعی محیطی و C_n ضلع nضلعی محاطی باشد :

$$A_n=\frac{2RC_n}{\sqrt{4R^2-C_n^2}}$$

۵ - اگرA_nو A_{2n} بترتیب اضلاع nضلعی و ۲nضلعی محیطی‌باشند :

$$A_{2n}=\frac{2RA_n}{2R+\sqrt{4R^2+A_n^2}}$$

۶- ضلع چندضلعیهای منتظم مهم ، بر حسب شعاع دایرهٔ محیطی‌آنها، بدین قرارند :

$C_3=R\sqrt{3}$ (مثلث) ، $C_4=R\sqrt{2}$ (مربع) ، $C_6=R$ (مسدس)

$C_n=2R\sin\left(\frac{180}{n}\right)^{\circ}$ (nضلعی)

۷- دو چندضلعی منتظم‌که عدهٔ اضلاعشان یکی باشد ، متشابهند .

۸- مساحت چندضلعی منتظم‌مساوی است‌با حاصل‌ضرب نصف محیطش در ارتفاع‌آن (یعنی شعاع دایرهٔ محاطی‌آن).

تمرین

۱- هرگاه زوایای یك چندضلعی محیطی بایکدیگر برابر باشند ، آن چندضلعی منتظم است .

۲- درهر دایره، مساحت مربع محیطی‌دو برابر مساحت مربع محاطی است .

۳- در شش‌ضلعی منتظم ABCDEF ثابت‌کنید که : الف - BF پاره‌خط AD را به دو قسمت می‌کند که یکی سه برابر دیگری است ؛ ب - FD و EC یکدیگر را به نسبت $\frac{1}{2}$ تقسیم می‌کنند .

۴- از تقاطع اقطار شش‌ضلعی منتظم ، شش‌ضلعی منتظم دیگری بوجود می‌آید .

۵- ضلع بیست‌ضلعی منتظم را بدست‌آورید .

تعریف - اگر قطعه‌خطی را به دو جزء چنان تقسیم‌کنیم‌که مربع قطعهٔ بزرگترمساوی باشد با حاصل ضرب قطعهٔ کوچکتر در تمام آن ،می‌گوییم‌آن قطعه‌خط را به نسبت ذات وسط وطرفین تقسیم‌کرده‌ایم .

۶- درهرپنج‌ضلعی منتظم ، نقطهٔ تلاقی دو قطر ، هرقطر را به دو جزء تقسیم می‌کند بقسمی‌که مربع جزء بزرگتر مساوی است با حاصل ضرب جزء کوچکتر در تمام قطر .

به عبارت دیگر ، **دوقطر ، یکدیگر را به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم می‌کنند .**

۷- پنج‌ضلعی منتظم ABCDE مفروض است . ثابت کنید که : الف - هرقطرآن، موازی است با یکی ازاضلاع . ب - اضلاع AE و AB با اقطار EC و BD یك لوزی می‌سازند .

۸- ثابت کنیدکه از تقاطع اقطار پنج‌ضلعی منتظم ، پنج‌ضلعی منتظم دیگری تشکیل می‌شود ؛ نسبت بین اضلاع‌آنها را بدست آورید .

۹- هرگاه از یك نقطه واقع در درون nضلعی منتظمی عمودهایی بر همهٔ اضلاع‌آن فرودآوریم ، مجموع این عمودها ، n برابر ارتفاع چندضلعی است .

راهنمایی - از دستور مساحت چندضلعی منتظم استفاده کنید .

۱۰ ـ شش‌ضلعی منتظمی به‌ضلع a مفروض است ؛ همهٔ اضلاع آن را از یك طرف رأس به اندازهٔ $m.a$ امتداد می دهیم ؛ ثابت کنید که از وصل کردن این نقاط ، شش‌ضلعی منتظمی بوجود می‌آید که سطحش $(m^۲+m+۱)$ برابر سطح شش‌ضلعی مفروض است .

۱۱ـ در دو طرف مرکز دایره دو وتر متوازی یکی مساوی $C_۶$ و دیگری مساوی $C_۳$ رسم می‌کنیم ؛ مطلوب است اولا محاسبهٔ ساق و قطر و ارتفاع ذوزنقه‌ای که این دو وتر دو قاعدهٔ آن باشند ؛ ثانیاً زاویه‌های بین قطرهای ذوزنقهٔ مزبور را پیدا کنید .

فصل هجدهم

حد ـ محیط دایره ـ نسبت محیط دایره به قطر

۱ـ تعریف حد ـ هرگاه مقدار تغییر پذیری همواره به مقدار ثابتی نزدیك شود ولی هیچگاه به‌آن نرسد ، این مقدار ثابت را حدآن متغیر می‌گویند ؛ یا به عبارت دیگر:

هرگاه متغیر x دائماً ترقی‌کند ولی $|x-a|$ به سمت صفر میل کند ، حد بالایی x عدد a خواهد بود . مثلاً حد بالایی عدد متغیر ...۴٫۹۹۹ (دائماً سمت راست عدد ، ۹ نوشته می‌شود) ، عدد ۵ است؛ زیرا که :

$$|۴٫۹۹۹... - ۵| \longrightarrow ۰$$

همچنین هرگاه متغیر x دائماً تنزل‌کند ولی $|x-a|$ به سمت صفر میل‌کند ، حد پایینی x عدد a خواهد بود . مثلاً حد پایینی عدد متغیر ۶٫۰۰۰۰۰۰۰۱ (دائماً بین ۱ و ممیز ، صفرگذاشته می‌شود) ،عدد ۶ است ؛ زیرا که :

$$|۶٫۰۰۰۰۰۰۰۱ - ۶| \longrightarrow ۰$$

وجود حد ، متکی به اصل زیراست :

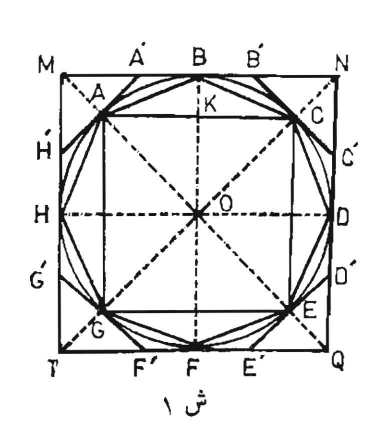
۲ـ اصل ـ هرگاه متغیری دائماً تنزل کند ولی همیشه از عدد ثابتی بزرگتر باشد ، یا متغیری دائماً ترقی کند ولی همیشه از عدد

ثابتی کوچکتر باشد ، دارای حد است .

۳ ـ قضیه ـ هرگاه عدهٔ اضلاع دو چندضلعی منتظم متشابه را ،که یکی محاط در دایره و دیگری محیط بر آن باشد ، بینهایت مرتبه دو برابر کنیم ،

اولا : محیطهای این چندضلعیها به سمت حدی میل می‌کند .
ثانیاً : حد محیطهای این دو چندضلعی ، یکی است .
ثالثاً : مقدار این حد ، بستگی به عدهٔ اضلاع چندضلعیهای منتظم اولیه ندارد .

برهان ـ اولا : برای اثبات فرض می‌کنیم که چندضلعی منتظم اولیهٔ محاطی،مربع $ACEG$ باشد (شکل ۱) ؛ اندازهٔ محیط‌آن را p و محیط چندضلعیهای منتظم محاطی‌بعدی راکه عدهٔ اضلاعشان دو برابرمی‌شود، بترتیب p_1 و p_2 و p_3 و ... و p_n فرض می‌کنیم . همچنین محیط مربع محیطی $MNQT$ را P و محیط چندضلعیهای منتظم محیطی بعدی راکه عدهٔ اضلاعشان دو برابر می‌شود ، بترتیب P_1 و P_2 و P_3 و ... و P_n فرض می‌کنیم . اکنون ، با توجه به شکل ۱ ، می‌بینیم‌که :



ش ۱

الف ـ
$$AC<AB+BC$$
$$CE<CD+DE$$
$$\cdots<\cdots+\cdots$$

پس از جمع طرفهای نامساویها نتیجه می‌شود : $p<p_1$

و به همین ترتیب ثابت می‌شودکه : $p<p_1<p_2<\cdots<p_n$

با زیاد شدن n مقدار p_n ترقی می‌کند و چون محاط در مربع $MNQT$ است ، همیشه از P ، محیط آن ،کوچکتراست ؛ بنابراین ، دارای حد است .

ب ـ
$$NB'+NC'>B'C'$$
$$QD'+QE'>D'E'$$
$$\cdots+\cdots>\cdots$$

از این نامساویها نتیجه می‌گیریم که : $P>P_1$

و به همین ترتیب : $P>P_1>P_2>\cdots>P_n$

با زیاد شدن n مقدار P_n تنزل می‌کند و چون محیط بر مربع $ACEG$ است ، همیشه از p ، محیط آن ، بزرگتر است ؛ بنابراین ، دارای حد است .

ثانیاً : ملاحظه می‌کنیم که :

$$\frac{P}{p}=\frac{OB}{OK} \quad \text{(شکل ۱)}$$

یا :
$$\frac{P}{OB}=\frac{p}{OK}=\frac{P-p}{OB-OK}=\frac{P-p}{KB}$$

و از آنجا :
$$P-p=\frac{P}{OB}\times KB \quad (1)$$

اگر تعداد اضلاع را بینهایت مرتبه دوبرابر کنیم ، P تنزل می‌کند و OB ثابت می‌ماند و KB به سمت صفر میل می‌کند ، یعنی حد طرف دوم تساوی (۱) صفر خواهد بود .

بنابراین ، وقتی‌که $n\longrightarrow\infty$: $P_n-p_n\longrightarrow 0$

پس : حد $P_n=$ حد $p_n=l$

ثالثاً: فرض کنیم که چندضلعی منتظم اولیه شش‌ضلعی باشد و محیط شش‌ضلعی منتظم محاطی p' و محیط شش‌ضلعی منتظم محیطی P' وحد مشترك آن دو l' باشد. برای آنکه ثابت کنیم که $l = l'$ ، این نامساویها را می‌نویسیم:

$p < P'$ (چون شش‌ضلعی منتظم محیطی، محیط برمربع محاطی است)؛

پس: $p_n < P'_n$

و از آنجا: $l < l'$

همچنین: $p' < P$ (چون مربع محیط بردایره، محیط برشش‌ـ ضلعی منتظم محاطی است)؛

پس: $p'_n < P_n$

واز آنجا: $l' < l$

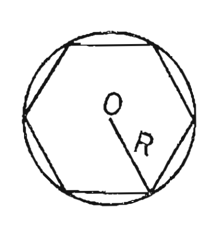
و ممکن نیست که l ، هم بزرگتر از l' و هم کوچکتر از l' باشد؛ پس $l' = l$ است.

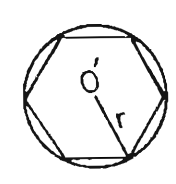
تعریف ـ حد مشترك محیط چندضلعیهای منتظم محاطی و محیطی يك دایره را **محیط همان دایره** می‌نامند.

۴ ـ قضیه ـ نسبت محیط دایره به قطر آن، مقداری است ثابت.

دو دایره به شعاعهای R و r فرض کرده محیطهای آنها را C و c می‌نامیم وثابت می‌کنیم که $\frac{C}{2R} = \frac{c}{2r}$.

برهان ـ دو چندضلعی منتظم متشابه در دو دایره محاط می‌کنیم (شکل ۲) و محیطهای آنها را p_n و p'_n می‌نامیم؛ می‌دانیم که:





ش ۲

$$\frac{p_n}{p'_n} = \frac{R}{r} = \frac{2R}{2r} \qquad (1)$$

رابطهٔ (۱)، وقتی‌که تعداد اضلاع را زیاد کنیم، همواره صحیح است؛ ولی حد p_n برابر C وحد p'_n مساوی c می‌باشد؛ پس در حد

$$\frac{C}{c} = \frac{2R}{2r}$$

یعنی:

$$\frac{C}{2R} = \frac{c}{2r}$$

۵ ـ عدد π ـ مقدار ثابت نسبت محیط هردایره به قطرآن را با حرف یونانی π نمایش می‌دهند.

پس می‌توان رابطهٔ شمارهٔ قبل را به صورت: $\frac{C}{2R} = \pi$ یا $C = 2\pi R$ نوشت و از آنجا نتیجه می‌شود:

طول محیط دایره برابر است با حاصل ضرب قطر دایره در عدد π.

۶ ـ محاسبهٔ π ـ با استفاده از رابطهٔ $\pi = \frac{C}{2R}$ ، می‌توان عدد π را به طریقهٔ زیر، که به نام ارشمیدس معروف است، حساب کرد:

اگر در دستور $\pi = \frac{C}{2R}$ مقدار R را $\frac{1}{2}$ اختیارکنیم، $\pi = C$ می‌شود؛ پس **π برابر است با اندازهٔ محیط دایره‌ای که به‌شعاع $\frac{1}{2}$ باشد.**

برای محاسبهٔ مقدارتقریبی π ، ابتدا محیط يك چندضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع $\frac{1}{2}$ را حساب می‌کنیم و آن را p_1 می‌نامیم؛ سپس محیط يك چندضلعی منتظم را که عدهٔ اضلاعش دو برابر آن باشد بدست می‌آوریم وآن را p_2 می‌خوانیم؛ واین عمل را دو یاسه یا n بار

تکرار کرده مقدار p_3 و p_4 و p_n را تعیین می‌کنیم .

هر یك از محیطهای $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_n$ یك مقدار تقریبی نقصانی π است و هر چه عدهٔ اضلاع زیادتر شود ، تقریب کمتر خواهد شد . وقتی که محاسبه را در p_n متوقف سازیم ، برای تعیین مقدار تقریب به این نحو عمل می‌کنیم : P_n محیط چندضلعی منتظم محیطی را ، که تعداد اضلاعش باعدهٔ اضلاع آخرین چندضلعی محاطی به محیط p_n برابر باشد ، بدست می‌آوریم ؛ P_n مقدار تقریبی اضافی π است و

$$p_n < \pi < P_n$$

پس p_n مقدار تقریبی نقصانی π است و تقریب از $(P_n - p_n)$ کوچکتر است .

مثال ـ اگر در دایره‌ای به شعاع $\frac{۱}{۲}$ از شش‌ضلعی منتظم محاطی آغاز کنیم :

برای	$n = ۶$	$c_6 = ۰/۵$	$p_1 = ۳$
برای	$n = ۱۲$	$c_{12} = ۰/۲۵۸۸۲$	$p_2 = ۳/۱۰۵۸۴$
برای	$n = ۲۴$	$c_{24} = ۰/۱۳۰۵۳$	$p_3 = ۳/۱۲۲۶۲$
برای	$n = ۴۸$	$c_{48} = ۰/۰۶۵۴۰$	$p_4 = ۳/۱۳۹۳۵$
برای	$n = ۹۶$	$c_{96} = ۰/۰۳۲۷۲$	$p_5 = ۳/۱۴۱۰۳$
برای	$n = ۱۹۲$	$c_{192} = ۰/۰۱۶۳۷$	$p_6 = ۳/۱۴۱۴۴$
برای	$n = ۳۸۴$	$c_{384} = ۰/۰۰۸۱۹$	$p_7 = ۳/۱۴۱۵۵$

اکنون در $p_7 = ۳/۱۴۱۵۵$ توقف می‌کنیم ومحیط ۳۸۴ ضلعی محیطی را بدست می‌آوریم :

$$P_7 = ۳/۱۴۱۶۵$$

پس ۳/۱۴۱۵۵ مقدار تقریبی نقصانی π است و مقدار تقریب کوچکتر است از :

$$۳/۱۴۱۶۵ - ۳/۱۴۱۵۵ = ۰/۰۰۰۱$$

یعنی تقریب از $\frac{۱}{۱۰۰۰۰}$ کوچکتر است ؛ بنا براین ، محاسبه تا سه رقم اعشار صحیح می‌باشد .

۷ـ یادداشت ـ مطابق بررسیهای علمی‌که تاکنون شده است ، مساحت دایره را نخستین بار مصریان بیش از ۱۷۰۰ سال پیش از میلاد مسیح بدست آورده بودند : به این طریق که بر روی $\frac{۸}{۹}$ قطر دایره مربعی می‌ساختند ؛ این مقدار ، تطبیق می‌شود بامحاسبهٔ π تا دو رقم اعشار ، یعنی $\pi = ۳/۱۴$. در قرن سوم پیش از میلاد مسیح ارشمیدس دانشمند نامی ، مقدار π را بین $۳\frac{۱۰}{۷۱}$ و $۳\frac{۱}{۷}$ یعنی بین ۳/۱۴۰۷ و ۳/۱۴۲۹ بدست آورد . یك قرن پس از وی بطلمیوس مقدار ۳/۱۴۱۷ را یافت . در سدهٔ شانزدهم میلادی متیوس هلندی به‌کمك ۱۵۳۶ ضلعی ، مقدار $\frac{۳۵۵}{۱۱۳}$ را یافت. این کسر، خاصیت آن دارد که بآسانی فراگرفته می‌شود ؛ بهاین طریق‌که رقمهای فرد ۱و۳و۵ را هریك دوبار از چپ به راست می‌نویسیم :

۱۱۳۳۵۵

بعد ، سه رقم آخررا صورت و سه رقم اول را مخرج‌کسرقرار می‌دهیم .

درعمل ، بیش ازچهار یاپنج رقم اعشاری مورد استعمال ندارد . مقدار π تا ده رقم این است :

$$\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵$$

لامبرفیلسوف وریاضیدان فرانسوی‌گنگ (اصم) بودن π را ثابت کرد .

ریاضیدان نامی ایرانی جمشیدبن مسعودبن محمود طبیب معروف به غیاث‌الدین جمشیدکاشانی (قرن نهم هجری) نسبت محیط دایره به قطرآن را با روش خاص و دقت زیادتری حساب کرده است .

مساحت دایره

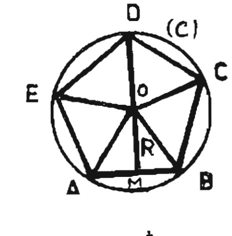
۸ - قضیه - طول قوس α درجه برابراست با حاصل ضرب محیط دایره در $\frac{\alpha}{\text{۳۶۰}}$.

زیرا که اگر طول قوس α درجه را l فرض کنیم ، این تناسب را خواهیم داشت :

$$\frac{l}{\text{محیط دایره}} = \frac{\alpha}{\text{۳۶۰}}$$

و از آنجا : $l = \text{محیط دایره} \times \frac{\alpha}{\text{۳۶۰}}$

۹ - قضیه - مساحت دایره برابر است با حاصل ضرب π در مجذور شعاع .



ش ۳

برهان - در دایره ، چندضلعی منتظمی محاط می‌کنیم (شکل ۳) و OM ارتفاع آن را می‌کشیم .

$$\text{مساحت چندضلعی} = \text{محیط چندضلعی} \times \frac{OM}{\text{۲}}$$

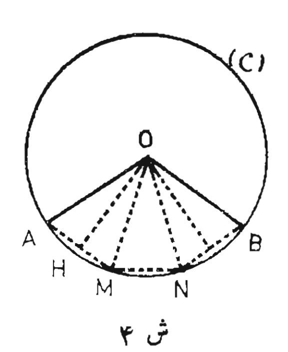
چون n ،عدهٔ اضلاع، رابینهایت زیادکنیم، مساحت چندضلعی میل می‌کند به طرف مساحت دایره و محیط چندضلعی میل می‌کند به سوی محیط دایره وحد OM ، شعاع دایره است ؛ پس :

$$\text{حد مساحت چندضلعی} = \text{حد محیط چندضلعی} \times \text{حد}\ \frac{OM}{\text{۲}}$$

یعنی : $\text{مساحت دایره} = \text{محیط دایره} \times \frac{R}{\text{۲}}$

و یا : $\text{مساحت دایره} = \text{۲}\pi R \cdot \frac{R}{\text{۲}} = \pi R^{\text{۲}}$

۱۰ - تعریف - قطاع دایره ، قسمتی است از سطح دایره محصور بین یك قوس و دو شعاع منتهی به دو طرف آن (شکل ۴) .



ش ۴

هرگاه $\widehat{AOB} = \alpha^\circ$ باشد،قطاع را α درجه گویند . قوس AB را قوس قطاع نامند .

۱۱- قضیه - مساحت قطاع برابر است با حاصل ضرب طول قوس آن در نصف شعاع .

برهان - در قطاع OAB (شکل ۴) قوس AB را به n جزء متساوی تقسیم می‌کنیم ؛ از رسم وترها ووصل‌کردن نقاط تقسیم به مرکز دایره ، n مثلث متساوی‌الساقین متساوی تشکیل می‌شوند (چرا ؟) .

در مثلث AOM : $\text{مساحت} = AM \cdot \frac{OH}{\text{۲}}$

پس : $\text{مساحت چندضلعی}\ OAMNBO = n \cdot AM \cdot \frac{OH}{\text{۲}}$

یا :

$$\text{مساحت چندضلعی}\ OAMNBO = (\text{طول خط‌شکستهٔ}\ AMNB) \cdot \frac{OH}{\text{۲}} \quad (\text{۱})$$

حال اگر n ، عدهٔ تقسیمات قوس AB ، بینهایت زیاد شود ، حد خط‌شکستهٔ AMNB قوس AB ، حد ارتفاع OH شعاع R و حد مساحت چندضلعی OAMNBO مساحت قطاع دایره خواهد بود و رابطهٔ (۱) چنین نوشته می‌شود :

$$\text{مساحت قطاع} = \text{طول قوس} \times \frac{R}{\text{۲}}$$

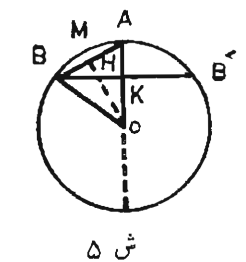
۱۲- تعریف - قطعهٔ دایره ، قسمتی است از سطح دایره محصور بین یك قوس و وتر آن . چون هر وتر متعلق به دو قوس است ، معمولا قوس کوچکتر از نصف محیط دایره درنظرگرفته می‌شود .

۱۳- قضیه - مساحت قطعهٔ دایره مساوی است با حاصل ضرب نصف شعاع در فزونی طول قوس آن بر نصف وتر قوسی که دو برابر قوس آن قطعه باشد .

برهان - قطعهٔ دایرهٔ AMB (شکل ۵) را در نظر می‌گیریم و ملاحظه می‌کنیم که :

مساحت‌قطعهٔ $AMB =$ مساحت قطاع $OAMB -$ مساحت مثلث OAB (۱)

$$= \widehat{AB}\times\frac{R}{۲} - AB\times\frac{OH}{۲}$$



ش ۵

چون عمود BK را بر OA فرود آوریم تا دایره را در B' قطع کند ، از طرفی ، $\widehat{BB'} = ۲\widehat{AB}$ یعنی BK نصف وتر قوس مضاعف $\widehat{AB}$ است ؛ و از طرف دیگر $\Delta AOH \sim \Delta ABK$ یعنی :

$$\frac{AB}{BK}=\frac{OA}{OH}=\frac{R}{OH}$$

پس : $AB\cdot OH = R\cdot BK = R\times\frac{BB'}{۲}$

چون در رابطهٔ (۱) به جای AB.OH مقدارش را قرار دهیم :

مساحت قطعهٔ $AMB = \left(\widehat{AB}-\frac{BB'}{۲}\right)\frac{R}{۲}$

۱۴ - رادیان ، کمانی است از دایره که طولش برابر باشعاع آن دایره باشد .

مانند درجه و گراد ، رادیان را نیز واحد اندازه‌گیری کمانها اختیار می‌کنند .

با ملاحظهٔ آنکه طول محیط دایره برابر با $۲\pi R$ است ، نتیجه می‌شودکه طول محیط دایره برحسب واحد رادیان برابر است با ۲π .

خلاصهٔ مطالب مهم :

۱- حد هر متغیر ، مقدار ثابتی است که آن متغیر حین تغییر پیوسته به‌آن نزدیك شود ، اما هیچگاه به‌آن نرسد .

۲- محیط دایره ، حد مشترك محیط چندضلعیهای منتظم محیطی و محاطی است وقتی‌که عدهٔ اضلاع آنها بیشمار شود .

۳- نسبت محیط دایره به قطردایره عددی است ثابت . این عدد ثابت اصم است وآن را باحرف یونانی π نمایش می‌دهند .

$$\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵ \; ....$$

در محاسبات دقیق آن را تا ۵ رقم اعشار و در محاسبات معمولی تا ۴ رقم و در محاسبات خیلی ساده تا دو رقم نمایش می‌دهند .

$$\pi = ۳/۱۴۱۵۹ \qquad \pi = ۳/۱۴۱۶ \qquad \pi = ۳/۱۴$$

۴- محیط دایره مساوی است باحاصل ضرب قطر در π :

$$C = ۲\pi R$$

۵- مساحت دایره مساوی است باحاصل ضرب مجذور شعاع در π :

$$S = \pi R^۲$$

۶- طول قوس دایره مساوی است با حاصل ضرب شعاع در اندازهٔ زاویهٔ مرکزی برحسب رادیان (چرا ؟) :

$$l = R \times \alpha$$

۷- مساحت قطاع مساوی است باحاصل ضرب قوس‌آن درنصف شعاع :

$$S = R\alpha\cdot\frac{R}{۲} = \frac{R^۲}{۲}\alpha$$

به عبارت دیگر ، مساحت قطاع مساوی است با حاصل ضرب مساحت دایره در نسبت قوس قطاع به محیط دایره .

۸ - مساحت قطعهٔ دایره مساوی است با حاصل ضرب نصف شعاع در فزونی طول قوس آن بر نصف وترقوسی که دو برابر قوس آن قطعه باشد :

$$S=\frac{R}{۲}\left(\widehat{AB}-\frac{BB'}{۲}\right)$$

تمرین

۱- با استفاده از $C_۴$ و $A_۶$ ثابت‌کنید که ۴ > π > ۳ .

۲ - میل دریایی یك درجهٔ نصف‌النهار است ؛ طول آن برحسب شعاع زمین چقدر است ؟

۳- در دایره‌ای به شعاع ۶ ، طول قوس °۹ را بدست آورید .

۴- شعاع زمین چقدر است (از رابطهٔ تقریبی متر با نصف‌النهار زمین استفاده کنید) .

۵- مساحت دایره را برحسب محیط آن بدست آورید .

۶- در دایره‌ای چهار شعاع رسم‌کنید‌که مساحت‌آن را به نسبت ۳، ۴، ۸ و ۹ تقسیم‌کنند.

۷ - شعاعهای OA و OB زاویهٔ °۶۰ می‌سازند ؛ از A عمود AC را برمماس درB فرود می‌آوریم ؛ سطح محدود بین AC و BC وقوس AB را حساب کنید .

۸- مساحت محدود بین سه دایرهٔ متساوی ومماس بر یکدیگر را بدست آورید .

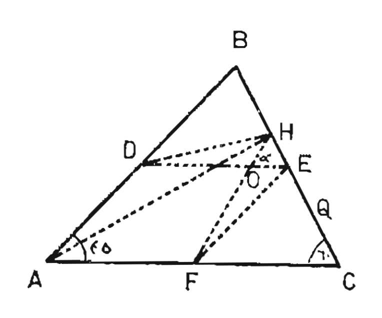
مسائل امتحانات نهایی

سوم متوسطه (داوطلبان متفرقه ـ خرداد ماه ۱۳۳۲)

۱- مثلث ABC را بامعلومات $AC=۲a$ و $\hat{A}=۴۵°$ و $\hat{C}=۶۰°$ رسم‌کنید .

۲ - ارتفاع AH را رسم می‌کنیم ؛ اگر D ، E و F اوساط اضلاع مثلث و O نقطهٔ تلاقی DE و HF باشد ، ثابت کنید :

الف ـ مثلث EFD و ABC متشابهند ؛ نسبت بین اضلاع متناسب را بنویسید .



ب ـ مثلث CFH متساوی‌الاضلاع است .

ج ـ ذوزنقهٔ HDFE متساوی الساقین و محاطی است . مرکزدایرهٔ محیطی ذوزنقه رابدست آورید .

د ـ اندازهٔ زوایای مثلث HOE را تعیین کنید .

پنجم متوسطهٔ علمی (شهریور ماه ۱۳۲۷)

اولاـ چهارضلعی محاطی ABCD را که درآن ، $AB=۲a$ وزاویهٔ $A=۶۰°$ و زاویهٔ $B=۷۵°$ وضلع $CD=a\sqrt{۲}$ می‌باشد ، رسم کنید .

ثانیاً ـ به فرض‌آنکه این چهارضلعی رسم شده باشد ، ثابت کنید :

الف ـ دایرهٔ محیطی‌آن به‌قطر AB است .

ب ـ طولهای اضلاع AD و BC و طولهای اقطار AC و BD را برحسب a ، وهمچنین مقدارزاویهٔ بین دو قطر چهارضلعی را بدست آورید .

ثالثاً ـ امتدادهای AB و CD در E و امتدادهای BC و AD در F یکدیگر را قطع می‌کنند ؛ ثابت کنید :

الف ـ نقطهٔ C مرکزدایرهٔ محیطی مثلث AEF است .

ب ـ نقطهٔ D از B و F به‌یك فاصله است .

۸ ـ مساحت قطعهٔ دایره مساوی است با حاصل ضرب نصف شعاع در فزونی طول قوس آن بر نصف وتر قوسی که دو برابر قوس آن قطعه باشد :

$$S=\frac{R}{2}\left(\widehat{AB}-\frac{BB'}{2}\right)$$

تمرین

۱ـ با استفاده از C_4 و A_6 ثابت کنید که $3 < \pi < 4$.

۲ ـ میل دریایی یك درجهٔ نصف‌النهار است ؛ طول آن برحسب شعاع زمین چقدر است ؟

۳ـ در دایره‌ای به شعاع ۶ ، طول قوس 9° را بدست آورید .

۴ـ شعاع زمین چقدر است (از رابطهٔ تقریبی متر با نصف‌النهار زمین استفاده کنید) .

۵ـ مساحت دایره را برحسب محیط آن بدست آورید .

۶ـ در دایره‌ای چهار شعاع رسم کنید که مساحت آن را به نسبت ۳، ۴، ۸ و ۹ تقسیم کنند.

۷ ـ شعاعهای OA و OB زاویهٔ 60° می‌سازند ؛ از A عمود AC را برمماس در B فرود می‌آوریم ؛ سطح محدود بین AC و BC وقوس AB را حساب کنید .

۸ـ مساحت محدود بین سه دایرهٔ متساوی ومماس بر یکدیگر را بدست آورید .

مسائل امتحانات نهایی

سوم متوسطه (داوطلبان متفرقه ـ خرداد ماه ۱۳۳۲)

۱ـ مثلث ABC را با معلومات $AC=2a$ و $\hat{A}=45^\circ$ و $\hat{C}=60^\circ$ رسم کنید .

۲ ـ ارتفاع AH را رسم می‌کنیم ؛ اگر D ، E و F اوساط اضلاع مثلث و O نقطهٔ تلاقی DE و HF باشد ، ثابت کنید :

الف ـ مثلث EFD و ABC متشابهند ؛ نسبت بین اضلاع متناسب را بنویسید .

ب ـ مثلث CFH متساوی‌الاضلاع است .

ج ـ ذوزنقهٔ HDFE متساوی‌الساقین و محاطی است . مرکز دایرهٔ محیطی ذوزنقه را بدست آورید .

د ـ اندازهٔ زوایای مثلث HOE را تعیین کنید .

پنجم متوسطهٔ علمی (شهریور ماه ۱۳۲۷)

اولاـ چهارضلعی محاطی ABCD را که در آن ، $AB=2a$ وزاویهٔ $A=60^\circ$ و زاویهٔ $B=75^\circ$ وضلع $CD=a\sqrt{2}$ می‌باشد ، رسم کنید .

ثانیاً ـ به فرض آنکه این چهارضلعی رسم شده باشد ، ثابت کنید :

الف ـ دایرهٔ محیطی آن به‌قطر AB است .

ب ـ طولهای اضلاع AD و BC و طولهای اقطار AC و BD را برحسب a ، وهمچنین مقدارزاویهٔ بین دو قطر چهارضلعی را بدست آورید .

ثالثاً ـ امتدادهای AB و CD در E و امتدادهای BC و AD در F یکدیگر را قطع می‌کنند ؛ ثابت کنید :

الف ـ نقطهٔ C مرکزدایرهٔ محیطی مثلث AEF است .

ب ـ نقطهٔ D از B و F به‌یك فاصله است .

ج ـ طولهای FC و EB بترتیب با قطرهای AC و BD برابرند .

رابعاً ـ از نقطهٔ O عمودی بر CD فرود می‌آوریم وموقع آن را H فرض می‌کنیم.

الف ـ ثابت کنید که این نقطه مرکز دایره‌ای است که به سه موقع ارتفاعهای مثلث ABF و همچنین به نقطهٔ O می‌گذرد.

ب ـ اگر K موقع ارتفاع رأس F از مثلث ABF باشد ، مثلث HCK متساوی‌الاضلاع است .

پنجم متوسطهٔ علمی (خرداد ماه ۱۳۳۸)

اولاً ـ چهارضلعی ABCD را بامعلومات زیررسم‌کنید :

الف ـ نسبت بین زوایای A، B، C و D بترتیب برابر ۳، ۶، ۷ و ۸ می‌باشد .

ب ـ طول AD برابر a ونسبت $\frac{CB}{CA}=\frac{1}{2}$ است .

ثانیاً ـ به‌فرض‌اینکه چهارضلعی رسم شده‌باشد ، اندازهٔ طولهای اضلاع دیگر و اقطار چهارضلعی را برحسب a تعیین‌کنید .

ثالثاً ـ منصف‌الزاویهٔ $\widehat{CAB}$ را رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در نقطهٔ K وامتداد ضلع CD را در نقطهٔ E تلاقی کند ؛ همچنین AD و BC را امتداد می‌دهیم تا درنقطهٔ F تقاطع‌کنند ، وازنقطهٔ C عمودی برAC اخراج می‌کنیم تا امتداد AB را در H قطع‌کند ، واز A عمودی بر امتداد CD فرود می‌آوریم ، این دو خط عمود یکدیگر را در نقطهٔ G تلاقی می‌کنند ؛ ثابت‌کنید :

الف ـ سه نقطهٔ E، F و G بر یك استقامت بوده ونقطهٔ F وسط قطعه‌خط EG بوده وخط ED محور تقارن مثلث AEG می‌باشد .

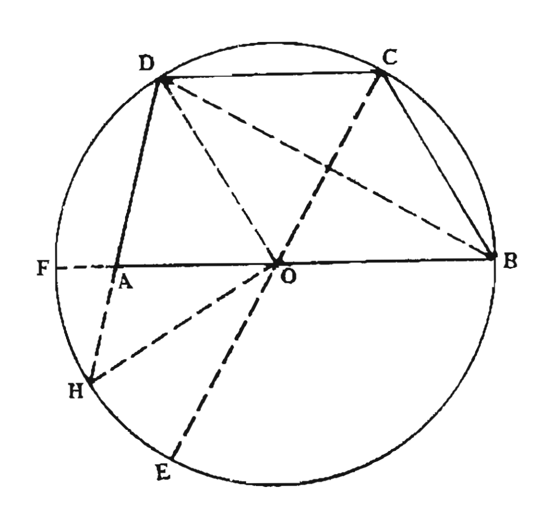
ب ـ نقطهٔ D مرکزدایرهٔ محیطی‌چهارضلعی AHEG می‌باشد وزاویهٔ CHD برابر $\frac{1}{3}$ زاویهٔ BAD است .

ج ـ مثلث AEG متساوی‌الاضلاع و مثلث ECK متساوی الساقین و HB برابر $\frac{1}{3}$AB می‌باشد .

د ـ خط DH موازی با EG بوده و خط HG زاویهٔ EGD رانصف می‌کند .

پنجم متوسطهٔ علمی (خرداد ماه ۱۳۳۲)

در ذوزنقهٔ ABCD طول ضلع CD و همچنین طول ساق BC برابر a بوده ومقدار زاویهٔ B برابر °۶۰ می‌باشد ومی‌دانیم طول قطر BD برابر طول قاعدهٔ AB است .



۱ـ این ذوزنقه را رسم کنید .

۲ـ به‌فرض رسم شدن ، طول‌اضلاع دیگر وطول اقطار واندازهٔ زوایای دیگررا بدست آورید .

۳ ـ از رأس C عمودی بر BD فرود آورده امتداد می‌دهیم تا AB را درO قطع‌کند ؛ ثابت‌کنید که این نقطه مرکزدایرهٔ محیطی مثلث DBC است و طول شعاع این دایره برابر a می‌باشد .

۴ ـ دایرهٔ به مرکز O و شعاع OC را رسم می‌کنیم تا امتدادهای AB، AD و OC را درF، H و E قطع‌کند ؛ ثابت‌کنید :

الف ـ ارتفاع رأس D ذوزنقه از نقطهٔ E می‌گذرد .

ب ـ خط OH بر OD عمود است .

ج ـ نقطهٔ H وسط کمان EF است .

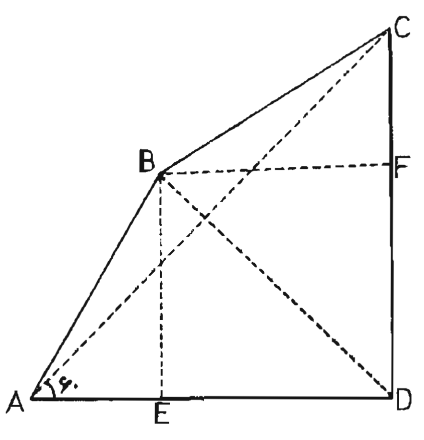
د ـ مثلث DBE متساوی الاضلاع است .

پنجم متوسطهٔ علمی (شهریور ماه ۱۳۳۳)

در چهارضلعی ABCD زاویهٔ A برابر °۶۰ و نسبت بین زوایای B (مجاور A) و C (مقابل A) و D بترتیب مانند ۱۰ ، ۴ و ۶ و طول اضلاع AB و CD (مقابل هم) بترتیب مساوی ۲a و $a(1+\sqrt{3})$ می‌باشد .

اولا ـ الف ـ اندازهٔ زوایای دیگر را بدست آورید .

ب ـ چهارضلعی‌را بامعلومات زوایا ودوضلع مقابل رسم‌کنید .



ثانیاً ـ در صورتی‌که چهارضلعی‌رسم شده باشد ،

الف ـ اندازهٔ طولهای‌اضلاع دیگر و اقطار چهارضلعی را بر حسب a تعیین کنید .

ب ـ ثابت‌کنید دو قطر برهم عمودند .

ج ـ اگر از B دو عمود براضلاع AD و CD فرودآورده و E و F را مواقع‌آنها فرض‌کنیم ، ثابت‌کنیدکه شکل BEDF مربع است.

د ـ مساحت چهارضلعی را برحسب a تعیین کنید .

ثالثاً ـ به مرکز B وشعاع BC دایره‌ای رسم می‌کنیم تاضلع DC را در H و دایرهٔ محیطی مربع را در G تلاقی‌کند .

الف ـ طول قطعهٔ DH را از روی خاصیت قوت نقطه نسبت به دایره حساب کنید .

ب ـ به وسیلهٔ طول DH ثابت کنید مثلث BHC متساوی‌الاضلاع است .

ج ـ ثابت کنید که این رابطه بر قرار است : $\overline{GD}^2 = DH \times DC$

د ـ ثابت کنید که نقطهٔ تلاقی AC و BF با دو نقطهٔ D و K بر یك استقامتند (K محل تلاقی دایرهٔ محیطی مربع با BC می‌باشد) .

هـ ـ ثابت کنید که قطعهٔ CK برابر نصف ضلع CD است .

پنجم متوسطهٔ علمی متفرقه (خرداد ماه ۱۳۳۴)

درمثلث ABC: $AB=a$ و $AC=a\sqrt{2}$ و زاویهٔ $B=45°$ است:

۱ـ این مثلث را رسم‌کنید .

۲ ـ اگر مثلث رسم شده باشد ، طول ضلع BC و طول شعاع دایرهٔ محیطی‌آن را برحسب a وهمچنین اندازهٔ زاویه‌های دیگرمثلث را تعیین‌کرده و دایره را رسم‌کنید .

۳ـ قطر AD از دایرهٔ محیطی‌را رسم می‌کنیم وD را به C و B وصل می‌نماییم ، ثابت‌کنید:

الف ـ دو مثلث AEB و CBD متشابهند (E نقطهٔ تلاقی AD و CB است)

ب ـ طولهای DB و CD را برحسب a بدست‌آورید .

ج ـ اگر CO را امتداد دهیم تا DB را در F تلاقی کند ، خواهیم داشت : $DO \times DA = DF \times DB$. از اینجا نتیجه بگیریدکه :

$$DF = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

رسم

درس رسم، شایان دقت بسیار است. هرقدر ابزارترسیم، یعنی خطکش، مقیاس ، پرگار،گونیا ، نقاله ،کاغذ ، مداد ، مداد پاك‌کن ، مداد و غیره دقیق‌تر و بهتر و ازجنس خوبتر باشند ، به‌کار ترسیم‌کمك بیشتری خواهندکرد . ولی بیشتر از ابزار ترسیم ، طرز کار خود شما مؤثر است . باید بنحوی با این ابزارها کارکنیدکه برآنها مسلط شوید و بسهولت ازآنها استفاده‌کنید .

می‌دانیدکه‌گونیا به‌کمك خطکش ، یا خطکش T ، برای رسم خطوط متوازی ومتعامد بکار می‌رود ؛ مورد استعمال نقاله وپرگار را هم می‌دانید ؛ حال دانسته‌های خود را بکار ببندید .

درس رسم شما نباید محدود ومنحصر به ترسیم ۱۲ نمونه‌ای باشدکه در این صفحات به شما داده می‌شود ، بلکه مهمتر ولازمتر آن است‌که ترسیماتی را که ضمن درس هندسه به‌آنها برمی‌خورید با دقت تمام رسم کنید ، از قبیل ساختن مثلث، رسم مماس بردایره ، رسم مماس مشترك دو دایره ، ساختن دو دایره در اوضاع مختلف ، ونظایرآنها .

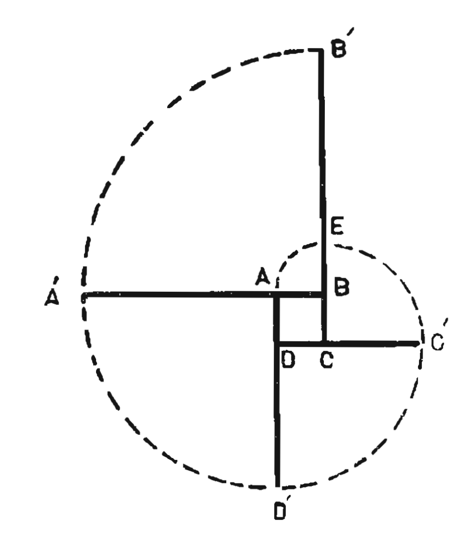
دوازده نمونه‌ای‌که دراین‌کتاب به‌شما داده شده است، ازانواع مختلف است وسعی شده است‌که از آسان به دشوار تنظیم شود . توضیح مختصری در بارهٔ هریك ، در صورت احساس ضرورت ، داده شده است . در مورد رسم شمارهٔ ۱۰ ، طرز ساختن مارپیچ را باید قبلا بدانید .

طرز ساختن مارپیچ ـ برای ساختن مارپیچ، یا از مثلث متساوی‌ـ الاضلاع شروع می‌کنیم یا از مربع .

استفاده از مثلث ـ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را بسازید واضلاع AB ، BC و CA را دریك جهت امتداد دهید ، مثلا درجهت از A به B واز B به C واز C به A . به مرکز A و به شعاع AB یك قوس ۱۲۰ درجه بزنید تا امتداد CA را در B_1 قطع‌کند ؛ به مرکز C و شعاع CB_1

قوس ۱۲۰ درجه‌ای رسم کنید تا امتداد BC را در A_1 قطع کند ؛ به مرکز B و شعاع BA_1 قوسی رسم‌کنید تا با امتداد AB در C_1 برخورد کند ؛ بار دیگر به مرکز A و شعاع AC_1 قوسی بزنید تا امتداد CA را در B_2 قطع کند . (وقتی که دقت کنید می‌بینید که در نامگذاری نقاط A_1 ، B_1، C_1 و B_2 و ... کاری کرده‌ایم که حرفی‌که روی امتدادیك ضلع نوشته می‌شود ، با دو رأسی‌که روی‌آن ضلع‌هستند فرق داشته باشد . مثلا روی AB نقاط را C_1 ، C_2، C_3 و... و روی BC آنهارا A_1 و A_2 و... می‌نامیم). به‌همین‌ترتیب ، رئوس مثلث را متوالیاً مرکزقرارداده باشعاعی مساوی فاصلهٔ آنها از آخرین نقطه‌ای‌که بر امتداد ضلع بدست آمده است ، قوسهای ۱۲۰ درجه می‌زنیم . از پشت سرهم قرار گرفتن این قوسها ، مارپیچ بدست می‌آید .

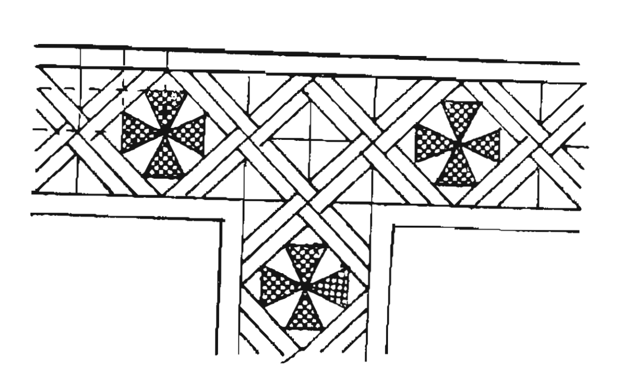
استفاده از مربع - اضلاع مربع را در يك طرف و در يك جهت امتداد می‌دهیم و همانطورکه در مورد مثلث گفتیم عمل می‌کنیم ، نهایت آنکه در اینجا به جای قوسهای ۱۲۰ درجه قوسهای ۹۰ درجه رسم می‌شوند .



رسم شمارهٔ ۱- مربع ABCD را به ضلع ۶ سانتیمتر و به مرکز

O بسازید. مربع EFGH را نیز باهمان ضلع وهمان مرکز بقسمی بسازید که اضلاعش موازی بااقطار مربع اولی‌باشد . ازتقاطع اضلاع دو مربع ، يك هشت‌ضلعی بوجود می‌آید . ۵ مربع دیگر بسازید که مرکزشان همان نقطهٔ O و اضلاعشان با اضلاع ABCD موازی باشند و بترتیب ، از داخل به خارج ، طول اضلاع به این قسم باشند : مربع دوم (بعداز ABCD) ، ۷ سانتیمتر ، سوم ، ۸ سانتیمتر ، چهارم ، ۱۱ سانتیمتر، پنجم ، ۱۲ سانتیمتر ، ششم (مربع خارجی)، ۱۳ سانتیمتر. به همین ترتیب مربعهایی موازی‌با EFGH بسازید ؛ شکل‌را مطابق نمونه تنظیم ومرکبی‌کنید . خطوط اضافی را پاك کنید .

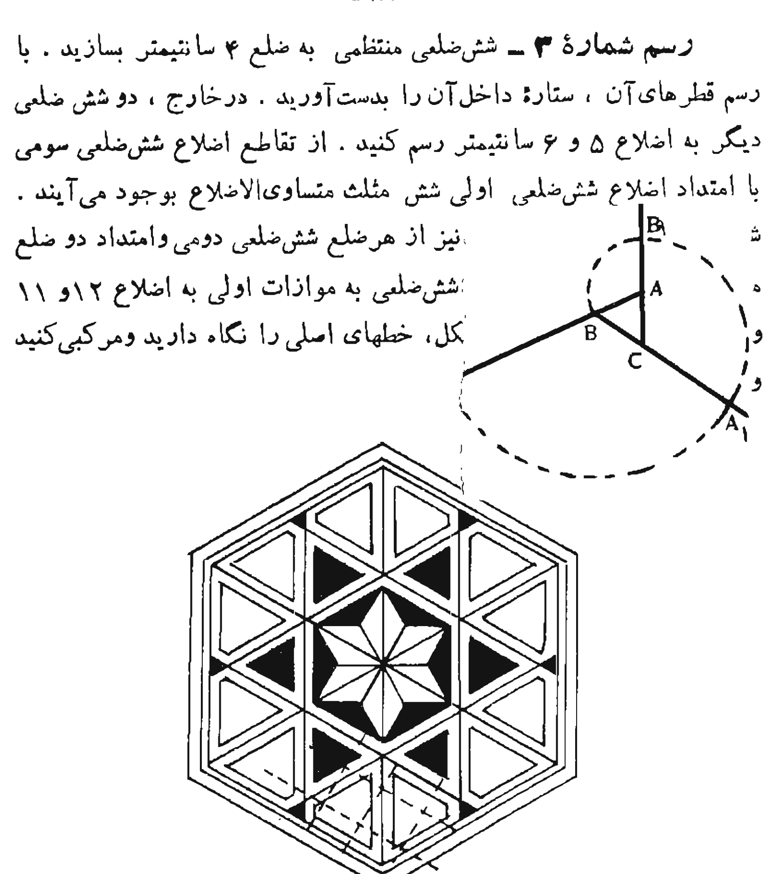
رسم شمارهٔ ۲- با توجه به‌شکل ، قاعدهٔ ترسیم‌آن را پیدا می‌کنید . طولها را بدلخواه بزرگ‌کنید .



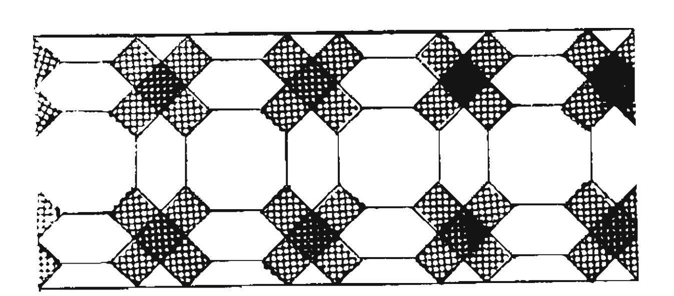
رسم شمارهٔ ۳ - شش‌ضلعی منتظمی به ضلع ۴ سانتیمتر بسازید . با رسم قطرهای‌آن ، ستارهٔ داخل‌آن را بدست‌آورید . درخارج ، دو شش ضلعی دیگر به اضلاع ۵ و ۶ سانتیمتر رسم کنید . از تقاطع اضلاع شش‌ضلعی سومی با امتداد اضلاع شش‌ضلعی اولی شش مثلث متساوی‌الاضلاع بوجود می‌آیند .

ش
ه
و
و

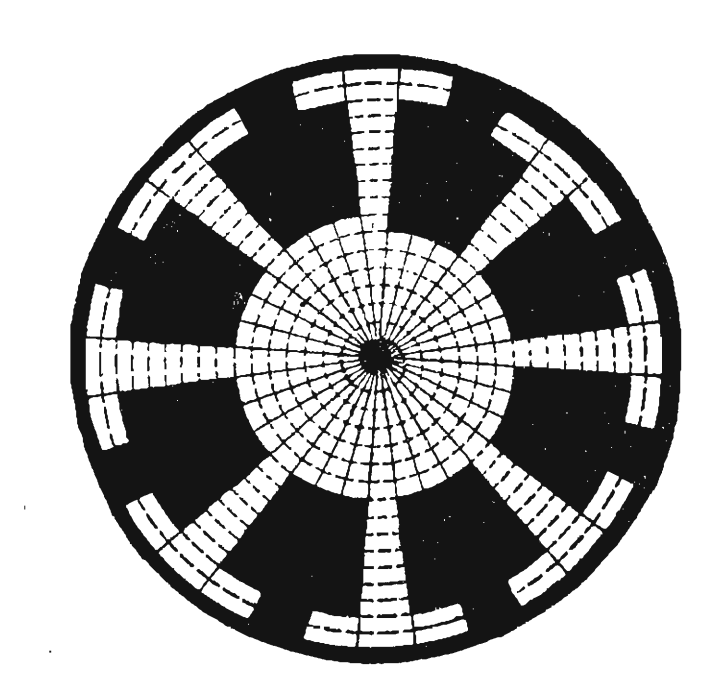
نیز از هرضلع شش‌ضلعی دومی وامتداد دو ضلع
شش‌ضلعی به موازات اولی به اضلاع ۱۲و ۱۱
کل، خطهای اصلی را نگاه دارید ومرکبی‌کنید



رسم شمارهٔ ۴ - ابعاد را بتناسب و بدلخواه بزرگ‌کنید . شکل را مرکبی‌کنید و هاشور بزنید.

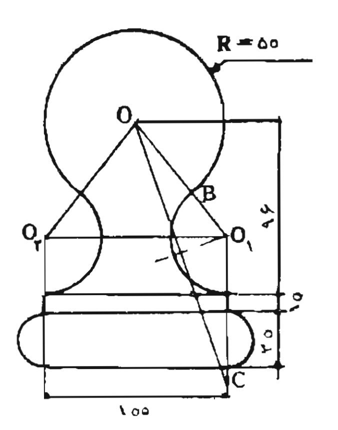


رسم شمارهٔ ۵ - مربعی به‌ضلع۵میلیمتر بسازید. برروی‌آن، مارپیچی رسم‌کنید که تعداد منحنیهایش مطابق نمونهٔ رسم باشد . زاویهٔ مرکزی را به ۳۲ جزء تقسیم‌کنید و مطابق شکل، قسمتها را مرکبی‌کنید و هاشور یا رنگ بزنید . (برای تقسیم زاویهٔ مرکزی مربع به ۳۲ جزء ، اول قطرها را رسم می‌کنید تا زاویه به چهار قسمت شود ؛ بعد ، سه مرتبه نیمسازهای زوایای حادث را می‌کشید ، تقسیم مطلوب انجام می‌شود) .



رسم شمارهٔ ۶ ـ مقیاس $\frac{۱}{۱}$ (یعنی به اندازهٔ طبیعی)، واحد میلیمتر؛

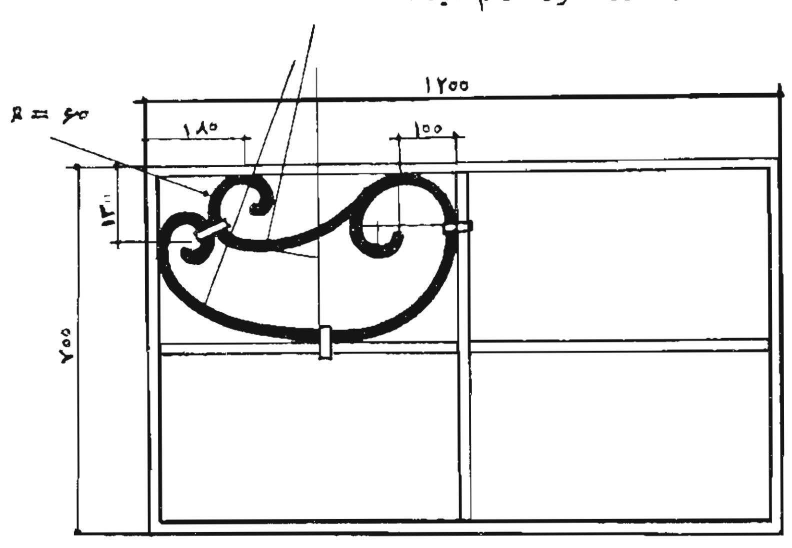
تزیین بالای نرده‌های فلزی .



رسم شمارهٔ ۷ ـ مقیاس $\frac{۱}{۱۰}$ ، واحد میلیمتر.

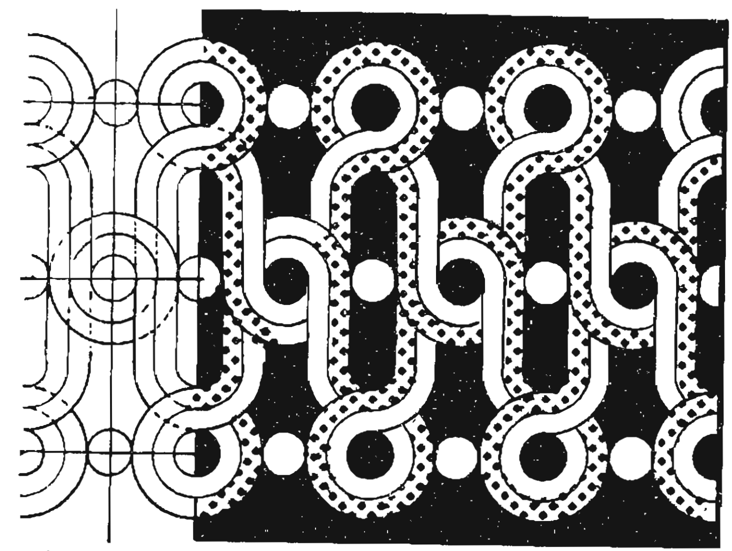
جزئی از يك نردهٔ آهنین با آهن مربع ۲۰ میلیمتری .

قسمتی راکه در نمونه داده شده است ، بکشید و سه قسمت دیگر را با استفاده از تقارن محوری رسم کنید .

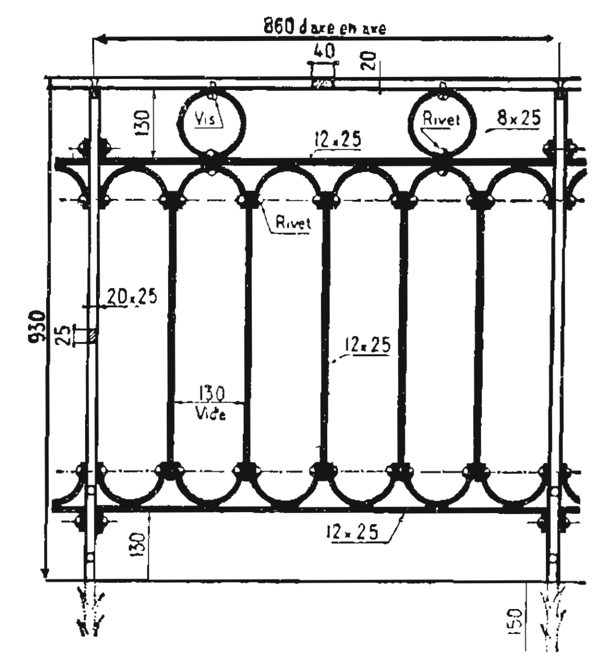


رسم شمارهٔ ۸ ـ مقیاس اختیاری .

گچ‌بری تزیینی . مراکزدوایر، از روی نمونه بسهولت بدست می‌آیند. شکل را مرکبی‌کنید و رنگ بزنید .

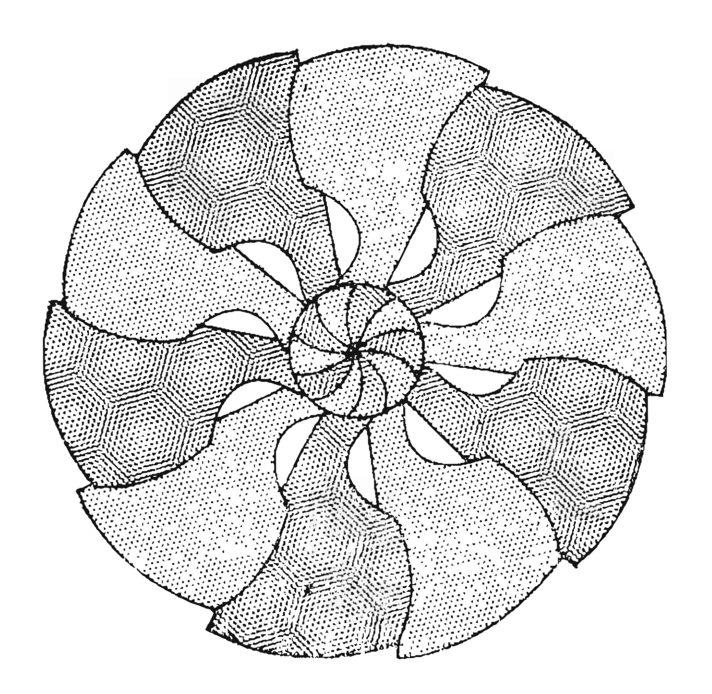


رسم شمارهٔ ۹ ـ نردهٔ جلو ایوان ـ واحد میلیمتر ، مقیاس $\frac{۱}{۲۰}$.

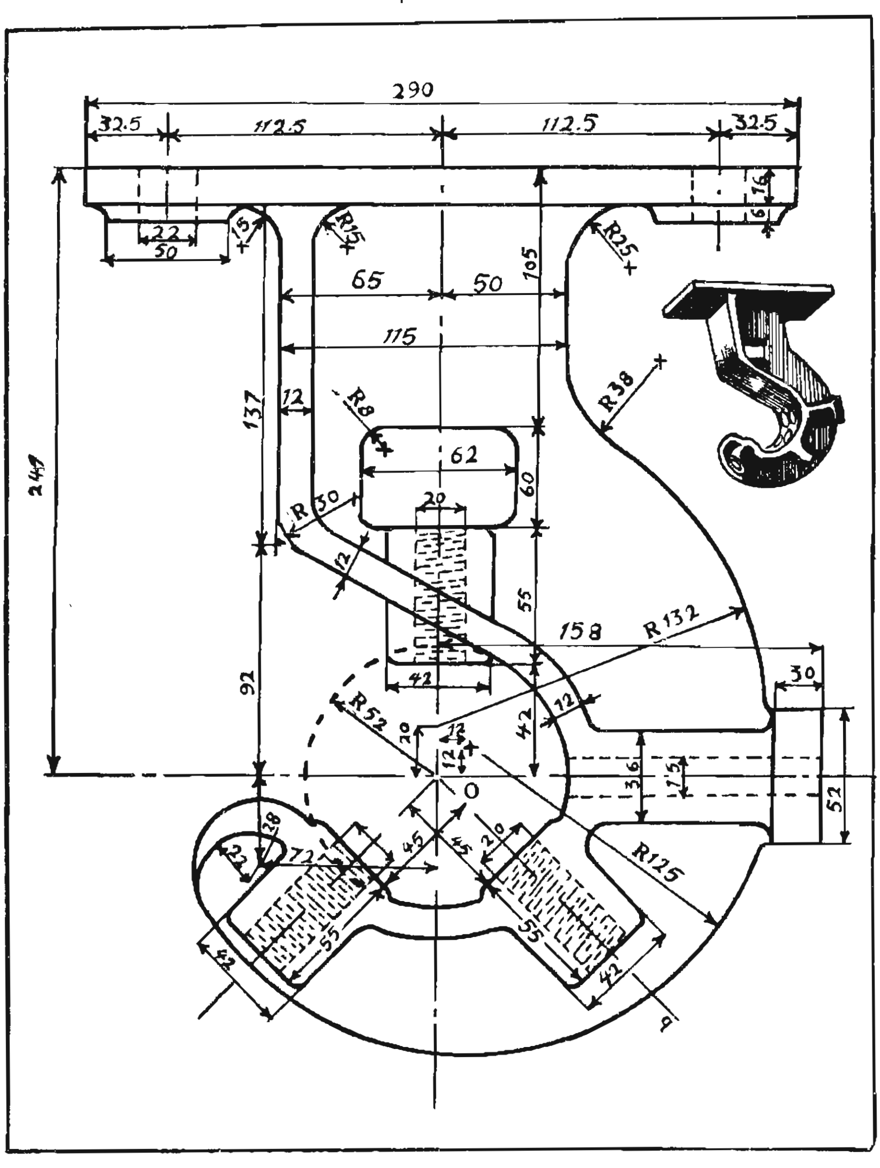


رسم شمارهٔ ۱۰- چرخ پره‌دار - واحد میلیمتر .

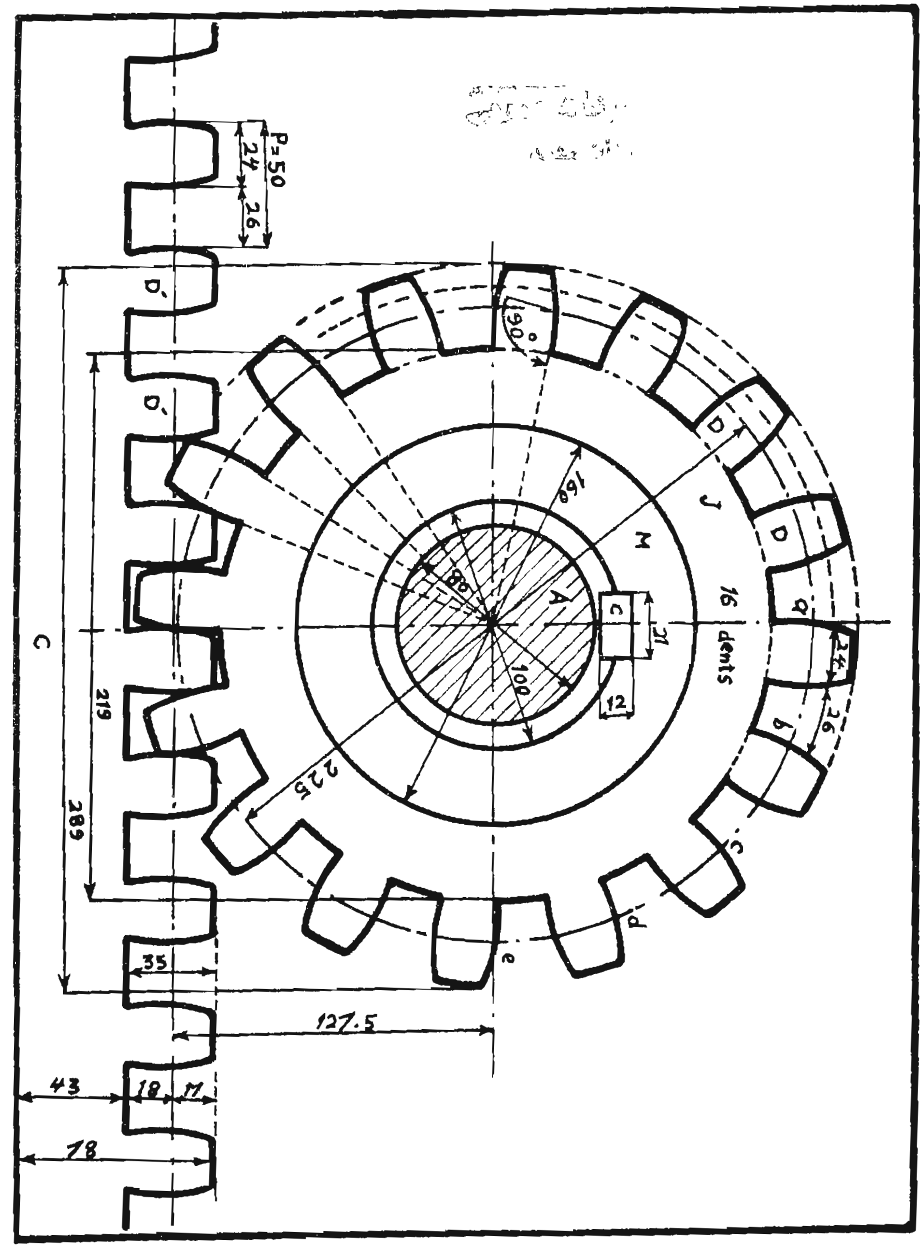
مثلث متساوی‌الاضلاع OAB را به ضلع ۲۲/۵ رسم کنید (O مرکز کاغذ است) . برروی AB مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را بسازیدکه زاویهٔ B آن، قائمه و BC = ۳۷/۵ باشد. برروی AC مثلث متساوی‌الساقین ACD را بسازیدکه درآن ، AC = CD و CD برامتداد BC باشد . سپس این ترسیمات را بجا آورید : ۱- قوس OB از دایرهٔ محیطی مثلث OAB ، ۲- نیمدایره‌ای به‌قطر BC که ضلع AC را قطع کند ، ۳ - قوس CD از دایرهٔ محیطی مثلث ACD ، ۴ - قوسی به مرکز A و شعاع AD که امتداد OA را در E تلاقی‌کند ، ۵ - خط OE . به این ترتیب ، یك پرهٔ چرخ تشکیل می‌شود . نه پرهٔ دیگر را هم به همین ترتیب رسم‌کنید .



رسم شمارهٔ ۱۱- قلاب ، مقیاس $\frac{1}{10}$ ؛ واحد سانتیمتر.



رسم شمارهٔ **۱۲** ـ چرخ دندانه‌دار و دنده ، واحد میلیمتر، مقیاس $\frac{۱}{۲}$.



پایان